

VORWORT

Der Schulunterricht in Darstellender Geometrie erfolgte lange Zeit ohne erkennbare Erneuerungstendenzen. In einem am 11.12.1979 vor der Arbeitsgemeinschaft der Lehrer für Darstellende Geometrie in Wien gehaltenen Vortrag habe ich vier Thesen formuliert, welche nach meiner Ansicht eine Umgestaltung des Unterrichts beherrschen sollten:

1. Die Grundaufgaben der Darstellenden Geometrie sind keine Wissenschaft für sich.
2. Die Kegelschnittlehre ist kein wesentlicher Teil der Darstellenden Geometrie.
3. Die in der Darstellenden Geometrie auftretenden Abbildungen sollen im Unterricht mehr Beachtung finden.
4. Der Unterricht in Darstellender Geometrie hat auch die Aufgabe, mit technischen Formen bekannt zu machen.

Zu Punkt 4 sei, was Anwendungen im Bauwesen betrifft, als Literatur genannt:

BRAUNER-KICKINGER, Baugeometrie. Bauverlag (Wiesbaden), Bd.1 (1977)
Bd.2 (im Druck).

Im März 1980 konnte ich zusammen mit wiss.Oberrat Mag. W.KICKINGER eine Fortbildungswoche für Lehrer an AHS in Raach abhalten¹. In der Zwischenzeit ist dieses Didaktikheft entstanden, das auf einer mehr als dreißigjährigen Lehrerfahrung an Gymnasien, Universitäten und technischen Universitäten fußt und bei der Fortbildungswoche in Raach, März 1981, Verwendung finden wird.

Der Unterricht in Darstellender Geometrie ist vor allem zu Beginn methodisch besonders schwierig; in dieser Zeit begangene Fehler sind nur schwer auszubessern. Der folgende, mit methodischen Hinweisen versehene Überblick ist kein Lehrgang, sondern eine für den Lehrer bestimmte systematische Zusammenstellung jener geometrischen Lehrinhalte, die zum elementaren Kernstoff gehören. Die hier fehlenden, aber in großer Zahl nötigen Beispiele müssen aus der vorhandenen Lehrbuchliteratur passend ausgewählt oder vom Lehrer selbst entworfen werden. Die Hauptziele dieser Darstellung sind eine zweckmäßige und leicht verständliche Behandlung der Grundaufgaben, begriffliche Klarheit und die Pflege von Querverbindungen zum Mathematikunterricht.

Im Unterricht wird die Reihenfolge vielfach anders sein; außerdem treten Überschneidungen der acht Kapitel auf. Soweit möglich ist der folgende Text sprachlich knapp formuliert und durch Hervorheben von nummerierten Folgerungen und Bemerkungen übersichtlich gegliedert. Diese Art der Darstellung ist für den Unterricht in der Schule natürlich nicht geeignet. Methodische Hinweise und Inhalte aus dem Mathematikunterricht sind engzeilig geschrieben.

Ich danke meinem Assistenten, Herrn Mag.F.MANHART, für die Zeichnung der Textfiguren, meiner Sekretärin, Frau G.GROTZ, für die sorgfältige Anfertigung des Manuskripts und dem Vorsitzenden der ÖMG, Herrn O.Univ.Prof.Dr.P.GRUBER, für die Aufnahme in die Didaktikreihe der ÖMG.

¹ Eine Reihe meiner Anregungen sind in LAUB-GRILLMAYER, Darstellende Geometrie für die 7.Klasse der AHS (1981), ohne daß die Autoren allerdings darauf hinweisen, aufgenommen worden. Es bleibt aber für die Verfasser von Schulbüchern noch viel zu tun, bis alle überholten Inhalte und eingebürgerten Unkorrektheiten eliminiert sind.

1. Grundbegriffe

Im Einführungsunterricht der Darstellenden Geometrie hat eine axiomatische Behandlung keinen Platz. Die Begriffe *Punkt* (Bezeichnung A, P, \dots ; Menge aller Punkte P), *Gerade* (a, g, \dots) und *Ebene* (ϵ, π, \dots) werden naiv verwendet. Geraden und Ebenen sind Punkt-mengen, was die Verwendung der Symbole \in und \subset ($P \in g, P \in \pi, g \subset \pi$) ermöglicht. Lagebeziehungen werden im Raum vorgezeigt, wobei ein kleines Kreidestück, ein Zirkel und ein Tisch oder Zeichendreieck sich vorzüglich zur Materialisierung eines Punktes, einer Strecke oder einer ebenen Figur eignen. Eine Strecke kann zu einer Geraden unbegrenzt verlängert werden und eine ebene Figur bestimmt eine Ebene, in der jede Gerade liegt, die zwei Punkte der ebenen Figur enthält.

Zur Demonstration räumlicher Sachverhalte können Modelle, besonders wenn sie der Schüler angreifen kann, eine wertvolle Hilfe sein. Vom Lehrer vor dem Schüler, und zwar oft freihändig angefertigte Schrägrißskizzen, bei deren graphischen Ausführung durch kräftige Strichstärken auf deutliches Hervorheben der Sichtbarkeitsverhältnisse geachtet werden sollte, erleichtern das Erfassen räumlicher Situationen ganz wesentlich. Eine solche Skizze, deren Entstehen der Schüler miterlebt und die er gegebenenfalls nachzeichnen kann, ist wirkungsvoller als eine vom Lehrer fertig mitgebrachte und projizierte Abbildung. Auf eine Besprechung der zur Anfertigung solcher Skizzen nötigen geometrischen Grundlagen kann jedoch zunächst verzichtet werden.

In der Anfangsphase des Unterrichts müssen noch nicht die Begriffe *Fernpunkt* und *Ferngerade* eingeführt werden (vgl. 5.3).

1.1 Lagebeziehungen

Während in der Schule für *Schneiden* üblicherweise das mengentheoretische Durchschnittssymbol \cap verwendet wird ($a \cap b = \{S\}$, $a \cap b = \{\}$, $\epsilon \cap \pi = e$), ist die Bezeichnung für *Verbinden* uneinheitlich. Zu empfehlen ist einfaches Nebeneinandersetzen der beteiligten Elemente ($\epsilon = ab$, $\epsilon = Pa$, $g = AB$, $\epsilon = ABC$). Runde bzw. eckige Klammern für *Schneiden* bzw. *Verbinden* sind nicht günstig. Einerseits ist der Schüler gewohnt, Klammern zur Kennzeichnung einer Reihenfolge von Operationen zu verwenden, wobei eckige Klammern eine den runden Klammern übergeordnete Bedeutung besitzen, andererseits entstehen bei mehrfachen Kombinationen unübersichtliche Ausdrücke. So lautet etwa die Vorschrift zur Konstruktion der Treffgeraden aus P an die windschiefen Geraden a, b dann $[P([Pa]b)]$ statt $P(Pa \cap b)$; Klammern in der üblichen Bedeutung sind nötig, wie etwa $A(b \cap \pi) \neq (Ab) \cap \pi$ für $A \notin \pi$, $b \not\subset \pi$ zeigt.

Für die durch zwei Punkte A, B bestimmte *Strecke* schreiben wir (A, B) (üblich ist auch $[A, B]$ und \overline{AB}) und für ihre *Länge* $\overline{AB} \geq 0$ (üblich ist auch $|AB|$).

Die in der ÖNORM A 6406 angegebenen Symbole AB für die Strecke (A, B) und runde Klammern für Verbinden ((AB) statt AB , (Pa) statt Pa usw.) haben sich in der geometrischen Literatur nicht eingebürgert.

Eine Gerade a *schneidet* eine Gerade b , wenn $a \cap b$ ein Punkt ist.

Schneidende Geraden a, b sind stets verschieden und bestimmen die Verbindungsebene ab . Zwei Geraden heißen (zueinander) *parallel*, wenn sie entweder gleich sind oder in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben. Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben und nicht parallel sind, heißen (zueinander) *windschief*. (Beispiel: Zwei durch geeignete Mauerkanten des Klassenzimmers festgelegte Geraden).

Bem.: (a) Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Geraden. Verschieden parallele Geraden besitzen nach Definition eine Verbindungsebene.

(b) Eine Parallele \tilde{a} zu a entsteht aus einer a schneidenden Geraden b bei Drehung von b um einen Punkt P von b in der Ebene ab (Fig.1.1). Durch einen Punkt P gibt es genau eine zu einer Geraden a parallele Gerade \tilde{a} . (Folgt aus der Transitivität und der Definition der Parallelität).

Eine Ebene wird durch zwei schneidende oder zwei verschiedene parallele Geraden festgelegt. Diese bestimmen einen *Zwickel* bzw. einen *Streifen*, der durch die Schenkel eines Zirkels bzw. die parallelen Kanten eines Lineals veranschaulicht wird. Legt man "einen Stab über einen Zwickel oder Streifen", also eine Gerade, die beide Angabegeraden in verschiedenen Punkten schneidet, so erhält man eine Gerade der Ebene. Auf diese Weise kann man dieselbe Ebene durch verschiedene Zwickel und Streifen festlegen (Fig.1.2). Nimmt man in Skizzen solche Zwickel als undurchsichtig an, so entstehen anschauliche einprägsame Bilder, die außerdem eine zweckmäßige konstruktive Behandlung der Ebene vorbereiten.

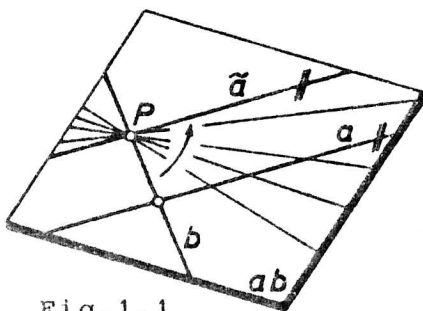


Fig.1.1

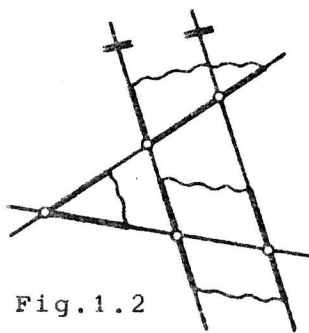


Fig.1.2

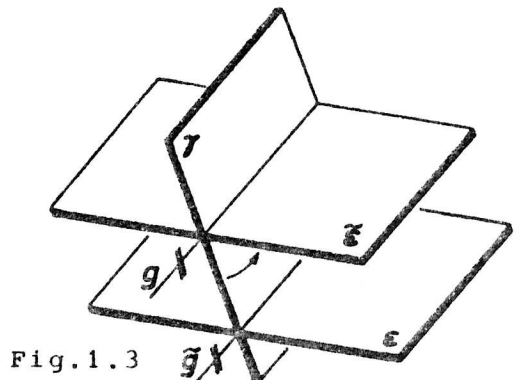


Fig.1.3

Bem.: (c) Ein Zwickel gibt nur einen Teil einer Ebene wieder; an realen ebenflächigen Objekten treten ebenfalls nur Teile von Ebenen auf. Für konstruktive Zwecke denkt man den Zwickel zu einer Ebene erweitert.

Eine Gerade und eine Ebene heißen (zueinander) *parallel*, wenn die Gerade entweder in der Ebene liegt oder keinen Punkt der Ebene enthält.

Eine Ebene ϵ *schneidet* eine Ebene π , wenn $\epsilon \cap \pi$ eine Gerade ist. Schneidende Ebenen sind stets verschieden. Zwei Ebenen heißen (zueinander) *parallel*, wenn sie entweder gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben.

Bem.: (d) Ist eine Gerade g zu einer Ebene ϵ parallel, so gibt es in ϵ eine zu g parallele Gerade \tilde{g} , nämlich die Schnittgerade von ϵ mit einer zu ϵ nicht parallelen Ebene γ durch g (Folgt aus der Definition der Parallelität, vgl. Fig. 1.3).

(e) Eine Parallelebene $\tilde{\epsilon}$ zu ϵ entsteht aus einer ϵ schneidenden Ebene γ bei Drehung von γ um eine zu ϵ parallele Gerade g von γ (Fig. 1.3).

1.2 Winkelmessung

Im Mathematikunterricht wird ein *Winkel* meist als die Vereinigungsmenge zweier Halbgeraden (*Winkelschenkel*) mit gemeinsamem Anfangspunkt S (*Winkelscheitel*) definiert und vom etwa in Altgrad angegebenen *Winkelmaß* unterschieden. Unter Verwendung je eines von S verschiedenen Punktes A bzw. B auf je einem Winkelschenkel ist dann $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSA$ mit $0^\circ \leq \sphericalangle ASB \leq 180^\circ$; für $0^\circ < \sphericalangle ASB < 90^\circ$ bzw. $90^\circ < \sphericalangle ASB < 180^\circ$ heißt der Winkel *spitz* bzw. *stumpf*. Nach Auszeichnung eines Drehsinns in der Ebene ASB entsteht ein *orientierter Winkel* mit dem *orientierten Winkelmaß* $\overline{\sphericalangle ASB}$, wobei $\overline{\sphericalangle ASB} = 360^\circ - \overline{\sphericalangle BSA}$ für $\overline{\sphericalangle ASB} \neq 0^\circ$, $0^\circ \leq \overline{\sphericalangle ASB} < 360^\circ$ gilt. Orientierte Winkel dienen zur Beschreibung einer Drehung. Bei jenen Winkelaufgaben der Darstellenden Geometrie, die sich nicht auf die Angabe der Größe einer Drehung beziehen, verwendet man zweckmäßig ein Winkelmaß, das zwei schneidenden Geraden zugewiesen wird. Zwei schneidende Geraden a, b bestimmen vier Winkel, von denen je zwei gleiches Winkelmaß besitzen.

Das *Winkelmaß* $\sphericalangle a, b$ zweier schneidender Geraden a, b ist das (nicht orientierte) Winkelmaß eines durch a und b bestimmten, nicht stumpfen Winkels; ferner ist $\sphericalangle a, a = 0^\circ$. Zwei schneidende Geraden a, b heißen (zueinander) *orthogonal* (*normal*, bilden einen *rechten Winkel*), wenn die vier durch a und b bestimmten Winkel gleiches Winkelmaß besitzen.

"Lotrecht" ist die Richtung zum Erdmittelpunkt und darf nicht anstelle von "orthogonal" benützt werden; daher sind auch die Sprechweisen "Fällen eines Lotes", "Lotfußpunkt", "Gemeinlot" usw. unzweckmäßig. Die Bezeichnung "senkrecht" sollte vermieden werden.

Bem.: (a) Schneiden die Geraden a, b einander in S und ist n eine Gerade durch S mit $\sphericalangle a, n = \sphericalangle b, n = 90^\circ$, so gilt für jede Gerade g durch S in ab dann $\sphericalangle g, n = 90^\circ$ (Veranschaulichen¹ durch Drehen der

¹ Ein Beweis solcher einfacher Sätze kann nur geführt werden, wenn man genau überblickt, ob alle Beweishilfsmittel bereits bewiesen wurden; dies trifft bei einer axiomatischen Behandlung zu. Es hat keinen Sinn, einen "anschaulich evidenten" Satz mit Hilfe eines anderen anschaulich evidenten Satzes beweisen zu wollen, der nicht bewiesen wurde. Beweise nicht evidenter Sätze machen neue Sachverhalte durch Rückführung auf bekannte Aussagen einsichtig.

Ebene ab um n).

(b) Schneiden die Geraden a, b einander und sind c, d zwei Geraden der Ebene ab mit $a \perp c$, $b \perp d$, so ist $\sphericalangle a, b = \sphericalangle c, d$.

(c) Schneiden einander a und b sowie \tilde{a} und \tilde{b} und gilt $a \parallel \tilde{a}$, $b \parallel \tilde{b}$, so ist $\sphericalangle a, b = \sphericalangle \tilde{a}, \tilde{b}$. Dies ermöglicht die Definition:

Das *Winkelmaß* $\sphericalangle a, b$ zweier windschiefer Geraden a, b ist das Winkelmaß $\sphericalangle \tilde{a}, b$, wobei \tilde{a} eine zu a parallele und b schneidende Gerade ist.

Eine Gerade und eine Ebene heißen (zueinander) *orthogonal (normal)*, wenn die Gerade zu zwei Geraden eines Zwickels der Ebene orthogonal ist.

Bem.: (d) Nach (a) und (c) ist n zu jeder Geraden in ε orthogonal.

(e) Aus $n \perp \varepsilon$ folgt $\tilde{n} \perp \varepsilon$ für $n \parallel \tilde{n}$ und $n \perp \tilde{\varepsilon}$ für $\varepsilon \parallel \tilde{\varepsilon}$.

Bei Winkelaufgaben, an denen eine Ebene beteiligt ist, ersetzt man zweckmäßig die Ebene durch eine ihrer Normalen; dann entstehen Definitionen, die den einfachsten Konstruktionsgang zur Ermittlung dieser Winkelmaße angeben (vgl. 3.4).

Das *Winkelmaß* $\sphericalangle \varepsilon_1, \varepsilon_2$ zweier schneidender Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ist das Winkelmaß $\sphericalangle n_1, n_2$ der Normalen n_1 und n_2 zu ε_1 und ε_2 durch einen Punkt P . Unter dem *Winkelmaß* $\sphericalangle \varepsilon, g$ einer Ebene ε und einer ε schneidenden Geraden g verstehen wir $90^\circ - \sphericalangle n, g$, wobei n die Normale zu ε durch einen Punkt P von g ist.

Bem.: (f) Wegen (e) und (c) sind diese Winkelmaße unabhängig von der Auswahl des Punktes P .

(g) Eine Ebene ε_2 ist genau dann normal zu einer Ebene ε_1 , wenn sie eine Normale von ε_1 enthält (Folgt aus (d)).

(h) Sind ε_1 und ε_2 schneidende Ebenen und μ eine zu $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ normale Ebene, so gilt $\sphericalangle \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \sphericalangle a_1, a_2$ für $a_1 = \varepsilon_1 \cap \mu$, $a_2 = \varepsilon_2 \cap \mu$ (Folgt aus (d) und (b)). Für $\sphericalangle \varepsilon, g \neq 90^\circ$ ist $\sphericalangle \varepsilon, g = \sphericalangle a, g$, wobei $a = \mu \cap \varepsilon$ und μ die zu ε normale Ebene durch g ist (Folgt aus (g) und (d)).

2. Projektion

Aus dem Mathematikunterricht benötigen wir die Begriffe *Abbildung (Funktion)*, *Grundmenge (Urmenge)*, *Zielmenge*, *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv*. Die Darstellende Geometrie liefert sehr anschauliche, einprägsame Beispiele für Abbildungen, die jedoch nicht immer *global* sind; die *Definitionsmenge* ist dann eine echte Teilmenge der Grundmenge.

2.1 Zentralprojektion

Eine kurze Besprechung der Zentralprojektion vor der Parallelprojektion erleichtert das Verständnis des Projektionsvorganges. Außerdem ist es zweckmäßig, bei Behandlung der Perspektivität (vgl. 5.4) die Zentralprojektion, und zwar vor ihrer systematischen Untersuchung, zur Verfügung zu haben. Keinesfalls sollten weiterführende Eigenschaften der Zentralprojektion jetzt schon erwähnt werden.

Sind π eine Ebene und $O \notin \pi$ ein Punkt, so heißt die Abbildung

$$c: P \rightarrow \pi \text{ mit } P \rightarrow c(P) =: P^c \text{ und } \{P^c\} = OP \cap \pi \text{ für } P \neq O$$

die *Projektion mit Zentrum (Augpunkt) O (Zentralprojektion) auf die Bildebene π (Fig. 2.1).*

Der Projektionsvorgang, welcher die Zuordnungsvorschrift dieser Abbildung beschreibt, kann physikalisch realisiert werden (Schattenwurf auf eine ebene Wand bei punktförmiger Lichtquelle, anvisieren eines Objekts durch ein Okularloch und zeichnen auf einer zwischen Augpunkt und Objekt befindlichen Glastafel (Perspektograph)). Die *Projektion* ist als Abbildung ein Tripel, bestehend aus der Grundmenge P , der Zielmenge π und der Zuordnungsvorschrift. Die Bildfigur in π , also das Ergebnis der Projektion, heißt *Riß (Zentralriß)*. Der Riß liegt in π , projiziert wird auf π .

Die Geraden durch O vermitteln den Projektionsvorgang und heißen *projizierende Geraden*, die Ebenen durch O heißen *projizierende Ebenen*.

Eigenschaften von Abbildungen müssen an Hand von anschaulichen Skizzen oder mit Hilfe von Modellen langsam entdeckt werden. Ein bloßes Aufzählen ist in der Schule nicht zielführend.

Eigenschaften der Abbildung $c: P \rightarrow \pi$:

1. Der Augpunkt O hat keinen Bildpunkt (eine Abbildung ist eine eindeutige Zuordnung!), jeder von O verschiedene Punkt V in der zu π parallelen Ebene durch O hat keinen Bildpunkt. Die Abbildung ist nicht global.
2. Die Fixpunkte sind genau die Punkte von π . Die Abbildung ist surjektiv.
3. Alle von O verschiedenen Punkte einer zu π nicht parallelen projizierenden Geraden s besitzen Zentralrisse im *Spurpunkt* $s^c = s \cap \pi$ von s (Fig. 2.1). Die Abbildung ist nicht injektiv.
4. Alle von O verschiedenen Punkte einer zu π nicht parallelen projizierenden Ebene σ besitzen Zentralrisse in der *Spur* $\sigma^c = \sigma \cap \pi$ von σ (Fig. 2.1).

Bem.: (a) Da c ein Abbildungszeiger ist, benütze man für den Riß einer projizierenden Geraden s bzw. einer projizierenden

Ebene σ die Bezeichnung s^c bzw. σ^c , obwohl s^c ein Punkt und σ^c eine Gerade ist.

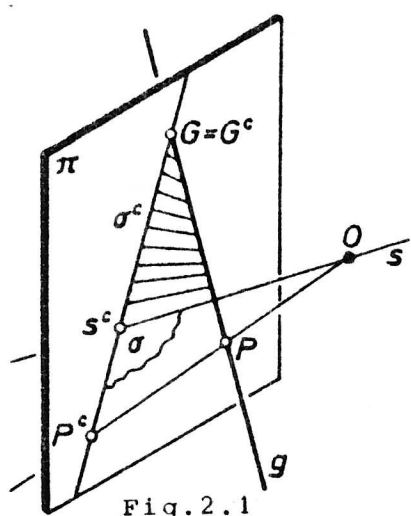


Fig. 2.1

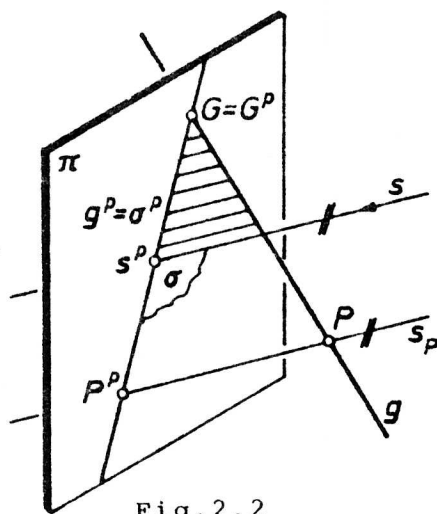


Fig. 2.2

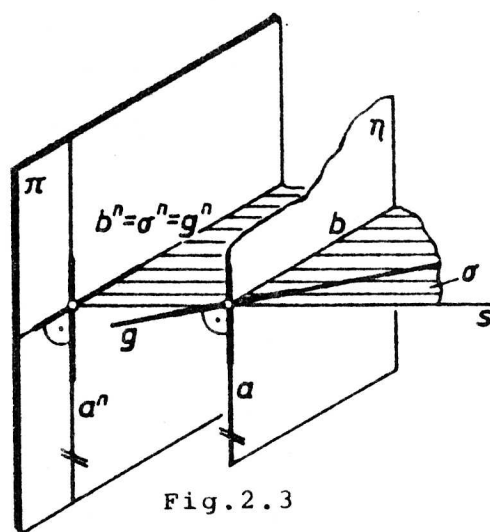


Fig. 2.3

5. Alle Punkte einer nicht projizierenden Geraden g besitzen Zentralrisse in der Geraden $\sigma^c = \sigma \cap \pi$, falls die projizierende Ebene σ durch g zu π nicht parallel ist (Fig. 2.1).

Da $g^c = \{X \in \pi \mid X = P^c \wedge P \in g\}$ bedeutet, stimmt die Menge g^c erst dann mit der Geraden $\sigma \cap \pi$ überein, wenn man die Fernpunkte hinzugefügt hat (vgl. 5.4).

2.2 Parallelprojektion

Sind π eine Ebene und s eine zu π nicht parallele Gerade, so heißt die Abbildung

$$p: P \rightarrow \pi \text{ mit } P \rightarrow p(P) =: P^p \text{ und } \{P^p\} = s_p \cap \pi \text{ für } P \in s_p \wedge s \parallel s_p$$

die Projektion parallel s (Parallelprojektion) auf die Bildebene π (Fig. 2.2).

Der Projektionsvorgang der Parallelprojektion entspricht annähernd dem Schattenwurf einer "sehr weit" entfernten Lichtquelle (Schatten bei Sonnenbeleuchtung) oder dem einäugigen Anvisieren aus "sehr großer" Entfernung.

Die Geraden parallel s vermitteln den Projektionsvorgang und heißen projizierende Geraden, die Ebenen parallel s heißen projizierende Ebenen.

Eigenschaften der Abbildung $p: P \rightarrow \pi$:

1. Die Abbildung ist global.
2. Die Fixpunkte sind genau die Punkte von π . Die Abbildung ist surjektiv.
3. Alle Punkte einer projizierenden Geraden s besitzen Parallel-

risse im Spurpunkt $s^P = s \cap \pi$ von s (Fig.2.2). Die Abbildung ist nicht injektiv.

4. Alle Punkte einer projizierenden Ebene σ besitzen Parallelrisse in der Spur $\sigma^P = \sigma \cap \pi$ von σ (Fig.2.2).

Bem.: (a) Für eine nicht projizierende Ebene ϵ ist $p|_{\epsilon}: \epsilon \rightarrow \pi$ surjektiv.

5. Alle Punkte einer nicht projizierenden Geraden g besitzen Parallelrisse in der Geraden $g^P = \sigma \cap \pi$, wobei σ die projizierende Ebene durch g ist (Fig.2.2). Dabei gilt $g^P = \{X \in \pi \mid X = P^P \wedge P \in g\}$.

Bei Zentralprojektion wird jede projizierende Gerade in natürlicher Weise vom Augpunkt weg zur Bildebene hin orientiert, was Sichtbarkeitsfragen zu entscheiden gestattet; bei Parallelprojektion dagegen muß man noch die *Blickrichtung* kennen. Eine in Blickrichtung orientierte projizierende Gerade heißt ein *Sehstrahl*; graphisch wird die Orientierung einer Geraden durch eine ausgefüllte Pfeilspitze angedeutet (vgl.5.3).

Da "Strahl" eine Gerade mit Orientierung bedeutet, sind die Bezeichnungen Strahlbüschel statt Geradenbüschel, Strahlbündel statt Geradenbündel, Strahlfläche (Strahlenfläche) statt Regelfläche usw. ungünstig.

Zwischen der Bildebene π , auf welche das Objekt projiziert wird, und der Zeichenebene (Heft, Tafel) sollte von Anfang an unterschieden werden. Der Riß eines realen oder im Geist vorgestellten Objekts ist eine Figur in der Bildebene, die in der *Aufnahmesituation* entsteht. Wir denken uns den Riß zur zeichnerischen Behandlung *richtig* in eine Zeichenebene verlagert. "Richtig" bedeutet dabei: Ist die Bildebene ein Brett, so liegt der Riß entsprechend der Orientierung der Sehstrahlen auf einer Brettseite; das Brett wird nun so auf die Zeichenebene gelegt, daß der Zeichner den Riß sieht. Nach Regeln, welche die Darstellende Geometrie lehrt, gelingt es, den Riß des Objekts in der Zeichnung zu vervollständigen, falls notwendige Angabeelemente gegeben sind.

Die Zeichnung kann beliebig bewegt, vervielfältigt oder maßstäblich verändert werden; die Zeichenebene ist einmal die horizontale Heftebene und einmal die lotrechte Tafelebene. In der Aufnahmesituation aber gibt es ein bestimmtes Objekt in einer bestimmten Lage zur Bildebene (vgl.3.2).

2.3 Zusätzliche Eigenschaften einer Parallelprojektion

Neben den in 2.2 genannten fünf Grundeigenschaften benötigt man noch weitere fünf Zusatzeigenschaften.

Eine zur Bildebene π parallele Ebene η heißt *Hauptebene*. Eine zur Bildebene π parallele Gerade h heißt *Hauptgerade*. Jede Hauptgerade liegt in einer Hauptebene.

6. Der Parallelriß F^P einer Figur F in einer Hauptebene η ist zu f kongruent (Schiebung von F nach F^P parallel zu s).
7. Der Parallelriß h^P einer Hauptgeraden h ist zu h parallel; der Parallelriß einer Strecke auf h hat die gleiche Länge wie diese Strecke (folgt aus 6).
8. Parallele, nicht projizierende Geraden haben parallele Risse: Die Parallelprojektion nicht projizierender Geraden ist *parallelentreu*. (Die beteiligten projizierenden Ebenen sind parallel).
9. Das Verhältnis der Längen zweier Strecken auf einer nicht projizierenden Geraden stimmt mit dem Verhältnis der Längen der Bildstrecken überein; eine Parallelprojektion ist insbesondere *mittelpunkttreu*. (Dies folgt aus dem Strahlensatz).

Bem.: Für das *Teilverhältnis* $TV(A,B,C)$ von drei Punkten A, B, C einer Geraden mit $B \neq C$ gilt $|TV(A,B,C)| = \overline{AC} : \overline{BC}$ mit $TV(A,B,C) < 0$ genau für C zwischen A und B . (Ein Verhältnis von zwei orientierten Strecken (Vektoren) gibt es nicht). Da bei Parallelprojektion die Zwischenbeziehung erhalten bleibt, folgt aus 9: Die Parallelprojektion nicht projizierender Geraden ist *teilverhältnistreu*.

10. Das Verhältnis der Länge einer Strecke zur Länge der Bildstrecke stimmt für Strecken auf nicht projizierenden parallelen Geraden überein (folgt aus 8 und 9).

2.4 Normalprojektion

Eine Parallelprojektion ist entweder eine *Schrägprojektion* oder eine *Normalprojektion* $n: P \rightarrow \pi$, die Bildfigur ist ein *Schrägriß* oder ein *Normalriß*. Für Normalprojektion wird eine einzige zusätzliche Eigenschaft benötigt:

- (N) Die Normalrisse a^n, g^n orthogonaler Geraden a, g sind orthogonal, wenn eine Gerade eine Hauptgerade und die andere Gerade nicht projizierend ist. (Die projizierende Ebene $\sigma = gs$ durch g in Fig. 2.3 ist zu a orthogonal; in der Hauptebene η durch a liegt die Gerade $b = \eta \cap \sigma$ mit $b^n = \sigma^n = g^n$ und $a^n \perp b^n$ nach 6).

3. Gepaarte Normalrisse

Die im folgenden besprochene Methode zur Einführung von Grund- und Aufriß benützt von Anfang an räumliche Koordinatensysteme, die vom Mathematikunterricht her vertraut sind, und keine MONGESche

Drehung, was erfahrungsgemäß dem Schüler die Kopplung zwischen Objekt und Bildpaar besser verständlich macht. Außerdem wird so die Axonometrie und die axonometrische Methode der Perspektive gut vorbereitet und damit eine baldige, das Vorstellungsvermögen schulende Behandlung der Axonometrie begünstigt.

Das hier benützte Koordinatensystem, bei dem in der Grundrißebene xy und in der Aufrißebene yz je ein ebenes Rechtssystem vorliegt, hat sich an den technischen Hochschulen des deutschsprachigen Raumes allgemein durchgesetzt und wird auch in Schulbüchern verwendet. Zur Vermeidung von Umstellungsschwierigkeiten sollte in der Schule nicht das Koordinatensystem der ÖNORM A 6061 zugrundegelegt werden.

3.1 Grundriß, Aufriß, Kreuzriß

Wir erfassen ein Raumobjekt stets mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems $\{x, y, z\}$ (drei paarweise orthogonale orientierte Koordinatenachsen, Ursprung U), dessen z -Achse lotrecht und nach oben orientiert ist, und das ein *Rechtssystem* ist: Im Anblick entgegengesetzt zum z -Pfeil läßt sich der x -Pfeil in den y -Pfeil durch eine positive Vierteldrehung überführen. Analoges gilt dann bei zyklischer Vertauschung $z \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$.

Die Koordinatenebene xy bzw. yz bzw. zx heißen *Grundrißebene* π_1 ($z=0$) bzw. *Aufrißebene* π_2 ($x=0$) bzw. *Kreuzrißebene* π_3 ($y=0$). Die Normalprojektion eines Punktes P parallel zur z -Achse bzw. zur x -Achse bzw. zur y -Achse auf π_1 bzw. π_2 bzw. π_3 liefert den *Grundriß* P' bzw. den *Aufriß* P'' bzw. den *Kreuzriß* P''' von P , die ersten bzw. zweiten bzw. dritten Sehstrahlen s_1 bzw. s_2 bzw. s_3 sind entgegengesetzt orientiert zur z -Achse bzw. zur x -Achse bzw. zur y -Achse. Der Grundriß ist die Ansicht von oben, der Aufriß die Ansicht etwa von vorne und der Kreuzriß dann die Ansicht von rechts.

Nach Wahl einer Einheitsstrecke e wird jedem Punkt P ein Koordinatentripel (x, y, z) zugeordnet. Zur Veranschaulichung dient der *Koordinatenquader* von P mit den Kanten (P, P') , (P, P'') , (P, P''') ; ein in U beginnender und in P endender Streckenzug aus drei seiner Kanten zeigt alle drei Koordinaten von P und heißt ein *Koordinatenweg* von P (Fig. 3.1).

Zwei Normalrisse in zueinander orthogonalen Bildebenen heißen *gepaarte Normalrisse*; Grund- und Aufriß sind gepaarte Normalrisse. Aus Grund- und Aufriß eines Punktes P können alle drei Koordinaten von P abgelesen werden; eine Koordinate, nämlich y , kommt sogar doppelt vor. Kennt man P' und P'' , wobei diese Punkte dasselbe y aufweisen, so kann man den Punkt P im Raum eindeutig wiederfinden. Analoges gilt für irgend zwei der Normalrisse in den drei Koordinatenebenen.

Zur zeichnerischen Behandlung denken wir zwei dieser Normalrisse zusammen mit den beiden Koordinatenachsen der betreffenden Koordinatenebenen richtig (vgl. 2.2) in die Zeichenebene verlagert. Dann geht in der Zeichenebene, je nach den ausgewählten Koordinatenebenen, der x -Pfeil in den y -Pfeil bzw. der y -Pfeil in den z -Pfeil bzw. der z -Pfeil in den x -Pfeil durch eine positive Vierteldrehung über (Fig. 3.2). In der Zeichenebene werden also zwei ebene kartesische Rechtssysteme, etwa $\{x, y\}$ und $\{y, z\}$ angegeben, mit deren Hilfe ein zum Riß in π_1 bzw. π_2 kongruenter (oder maßstäblich verzerrter) Riß gezeichnet wird. Man wählt üblicherweise den Aufriß und den Kreuzriß in der Zeichenebene so, daß die z -Achse zum linken Zeichenblattrand parallel und zum oberen Zeichenblattrand hin orientiert ist.

Die Gestalt der Risse in den Koordinatenebenen soll für viele einfache Objekte diskutiert werden. Dazu sind Modelle besonders geeignet, die in ein Modell des Koordinatensystem hineingestellt werden. Bei der Einführung ist es zweckmäßig, in der Zeichenebene immer die nicht punktförmigen Risse der Sehstrahlen einzuzichnen (Fig. 3.2): Die z -Achse kommt im Aufriß und im Kreuzriß vor; in diesen Rissen erscheint ein erster Sehstrahl s_1 , jeweils entgegengesetzt zum z -Pfeil, usw.

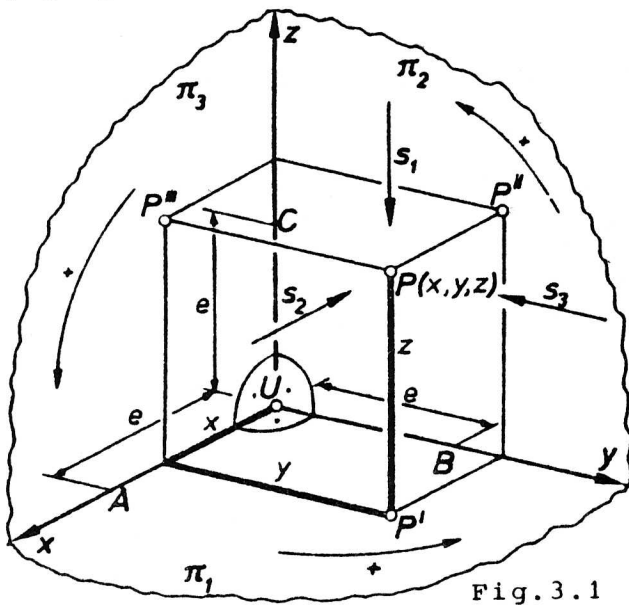


Fig. 3.1

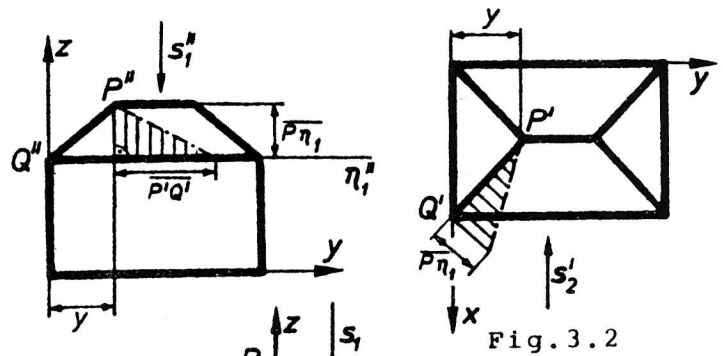


Fig. 3.2

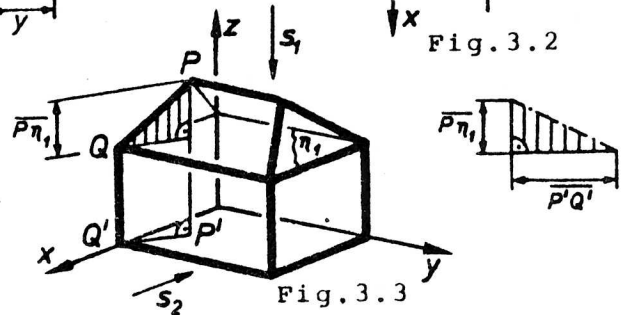


Fig. 3.3

In der Zeichenebene werden die beiden Koordinatensysteme, etwa $\{x, y\}$ und $\{y, z\}$, so gewählt, daß sich die Risse eines Objekts möglichst nicht überlappen. Eine eigene Diskussion von Punkten in den verschiedenen Quadranten entfällt. Die beiden Risse können zunächst nebeneinander in die Zeichenebene gelegt werden, wie das der geometrische Laie von sich aus tut (Fig. 3.2). Das xy -Kreuz in der Zeichenebene dient dabei nur zum Ausmessen des Grundrisses und wird daher mit x, y und nicht mit x', y' beschriftet (vgl. dagegen 4.2, Bem. (a)).

Ausgehend von zwei solchen Rissen soll das Rekonstruieren des Objekts eingeübt werden. Das Objekt wird nicht "in bezug auf die Zeichenebene" rekonstruiert, sondern immer in bezug auf das Koordinatensystem. Dazu kann ein Koordinatenweg eines Punktes ver-

wendet werden, oder wir denken etwa die Grundrißfigur aus der Zeichenebene in π rückverlagert und entnehmen die fehlende Information, nämlich die z -Koordinaten, dem Aufriß. Das rekonstruierte Objekt soll in einer vom Lehrer angefertigten Skizze anschaulich festgehalten werden (Fig.3.3).

Diese Art der Rekonstruktion der Raumobjekte aus zwei Normalrissen, welche auf die Forderung verzichtet, man müsse eine Bildebene unbedingt mit der Zeichenebene identifizieren, vermeidet einerseits die üblichen Schwierigkeiten, daß der Schüler bezüglich seines horizontalen Heftes, der Lehrer aber bezüglich der lotrechten Tafel rekonstruiert und entspricht andererseits der natürlichen Vorstellung: Der Grundriß eines Objekts entsteht in der Aufnahmesituation und die eventuell maßstäblich verkleinerte Zeichnung kann unabhängig vom Objekt beliebig herumgetragen werden.

3.2 Geordnete Lage gepaarter Normalrisse

Verwendet man etwa Grundriß und Aufriß, so wird in der Zeichenebene das Übertragen der doppelt auftretenden y -Koordinaten erleichtert, wenn man die beiden Risse "geschickt" in die Zeichenebene legt: Nach 3.1 ist die y -Achse der Aufrißfigur parallel zum unteren Zeichenblattrand und nach rechts orientiert; wir wählen die y -Achse der Grundrißfigur so dazu parallel, daß Grund- und Aufriß eines Punktes stets auf einer zum linken Zeichenblattrand parallelen Geraden liegen. Zwei Risse befinden sich in der Zeichenebene in *geordneter Lage*, wenn es parallele Geraden (*Ordner*) so gibt, daß die beiden Bildpunkte eines Punktes stets auf demselben Ordner liegen.

Die Bezeichnung "gepaarte Normalrisse" bezieht sich auf eine räumliche Situation, nämlich normale Bildebenen, die Bezeichnung "geordnete Lage" betrifft die gegenseitige Lage zweier Risse in der Zeichenebene. Beides unter einer Bezeichnung, etwa *zugeordnete Normalrisse* zu subsumieren, ist nicht günstig: Zwei Einschneiderisse sind gepaart, aber nicht in geordneter Lage (vgl.4.2); das normalaxonometrische Bild und der Einschneidergrundriß sind in geordneter Lage, aber keine gepaarten Normalrisse (vgl.4.3).

Für zwei *gepaarte Normalrisse in geordneter Lage* müssen drei Eigenschaften erarbeitet werden, welche alle Konstruktionen beherrschen:

1. Eine Hauptebene und eine zu ihr normale, projizierende Gerade erscheinen im gepaarten Normalriß als zueinander normale Geraden. (Alle Punkte etwa einer ersten Hauptebene η_1 haben dieselbe z -Koordinate, die im Aufriß zu sehen ist; eine erstprojizierende Gerade ist parallel zur z -Achse).
2. Die nicht punktförmigen Risse verschiedenartiger Sehstrahlen sind parallel, nämlich parallel zu den Ordnern, und entgegen-

gesetzt orientiert. (Folgt aus 3.1, vgl. Fig. 3.4).

3. Jede Strecke auf einer projizierenden Geraden erscheint im gepaarten Normalriß unverzerrt. (Das ist ein Sonderfall von 2.3,7).

Bem.: (a) Da nach 2.3 eine Hauptgerade in einer Hauptebene liegt, folgt aus 1: Eine Hauptgerade h und eine projizierende Gerade erscheinen im gepaarten Normalriß als zueinander normale Geraden, falls h dort nicht projizierend ist (Fig. 3.4, vgl. auch 2.4, (N))

(b) In der Anordnung gemäß ÖNORM A 6061 liegt der Grundriß (Ansicht von oben) in der Zeichenebene unter dem Aufriß (Ansicht von vorne) und der Kreuzriß (Ansicht von rechts) links vom Aufriß (Fig. 3.5). Die Regel 2 gilt natürlich auch in der sogenannten *amerikanischen Anordnung*, bei der der Grundriß in der Zeichenebene über dem Aufriß und der Kreuzriß rechts vom Aufriß liegt; die Pfeile der zu den Ordnern parallelen Geraden s_1'' und s_2' stechen dann eben nicht aufeinander zu, sondern weisen voneinander weg (Fig. 3.6). Umstellungsschwierigkeiten gibt es nur, wenn man darauf trainiert ist, immer bezüglich der Zeichenebene zu rekonstruieren.

(c) Die Regel 2 folgt daraus, daß man zwei gepaarte Normalrisse richtig in geordneter Lage auf die Zeichenebene legt und gilt daher nicht nur für Normalrisse in zwei Koordinatenebenen.

Bei dieser Einführung wird keine MONGESche Drehung benötigt, welche eine Bildebene in jene andere Bildebene dreht, die als Zeichenebene fungieren soll. Diese Drehung hat mit dem Projektionsvorgang nichts zu tun und kompliziert daher die Vorstellung, was besonders bei der Einführung von Seitenrissen zum Tragen kommt. Die Kopplung zum Raum ist mit Hilfe des Koordinatensystems einfacher zu verstehen, wobei die mit den beiden Rissen verknüpften ebenen Koordinatensysteme wichtige Hilfsdienste leisten. Natürlich kann man den Grundriß und den Aufriß auch so in die Zeichenebene legen, daß speziell die y -Achsen in der Zeichenebene übereinstimmen

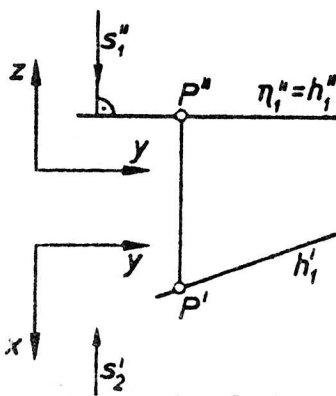


Fig. 3.4

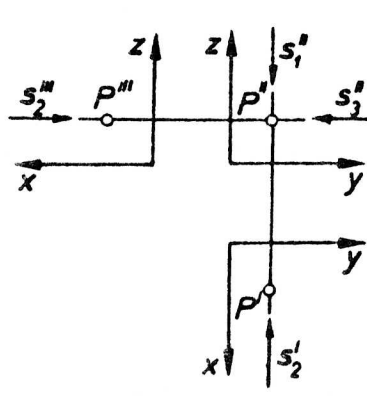


Fig. 3.5

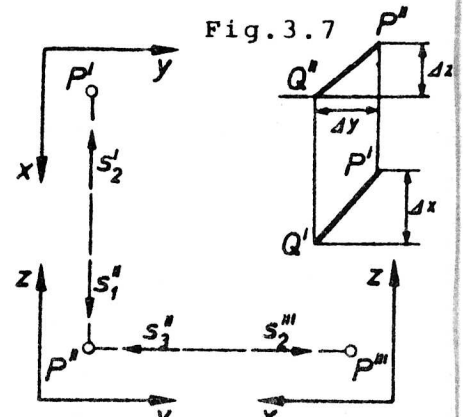


Fig. 3.6

Fig. 3.7

(vgl. Fig. 3.8); dies mag bei der Festlegung einheitlicher Angaben von Vorteil sein. Für die gemeinsame Achse dann eine eigene Bezeichnung, etwa *Rißachse* zu verwenden, ist unnötig.

Sehr bald erkennen die Schüler, daß die ebenen Koordinatensysteme in den beiden in der Zeichenebene befindlichen Rissen bei Konstruktionen nie verwendet werden, also keinen Beitrag zu den Objektabmessungen liefern. Dann ist es Zeit darauf hinzuweisen, daß die Lage von Objektpunkten zueinander und damit die Objektabmessungen auch ohne Kenntnis der Koordinatenachsen aus den in geordneter Lage befindlichen gepaarten Normalrissen entnommen werden können (Fig.3.7), die Koordinatenachsen in der Zeichenebene daher entbehrlich sind.

3.3 Ebenen in gepaarten Normalrissen

Wenn auch alle folgenden Konstruktionen für zwei gepaarte Normalrisse in nicht geordneter Lage, etwa in zwei Einschneiderissen (vgl.4.2), in gleicher Weise funktionieren, so verwenden wir im Einführungsunterricht stets geordnete Lage. Wir legen i.f. etwa Grund- und Aufriß zugrunde.

Nach 1.1 wird eine Ebene durch einen Zwickel oder einen Streifen angegeben. Nach Fig.1.2 kann man dieselbe Ebene durch verschiedene Zwickel festlegen und die *Vervollständigungsaufgabe* für Ebenen durch *Angittern* einer Geraden an einen Zwickel (Streifen) lösen. Eine Ebene ab ist genau dann projizierend, wenn eine Zwickelgerade projizierend ist oder die beiden Zwickelgeraden zusammenfallende Risse haben. Meist ist es vorteilhaft, Zwickel aus verschiedenartigen Hauptgeraden der Ebene zu verwenden (Fig.3.8).

Bem.: (a) Wenn jede erste Hauptgerade h_1 der Ebene auch eine zweite Hauptgerade ist, also h_1' normal zu s_2' verläuft, so ist die Ebene drittprojizierend; in diesem Fall wird die Ebene in Grund- und Aufriß durch einen Streifen aus Hauptgeraden festgelegt. Mit Hilfe eines solchen Streifens kann die *Vervollständigungsaufgabe* für eine dritte Hauptgerade durch *Angittern*, also ohne Teilverhältnisübertragung zweckmäßig gelöst werden (vgl.die Gerade c in Fig.7.6).

Als letzte Lageaufgabe bleibt die Bestimmung des Schnittpunkts S einer Geraden g mit einer Ebene $\epsilon=ab$ übrig. Zuerst ist die räumliche Situation zu klären: Der Punkt S liegt auch auf der Schnittgeraden c jeder Ebene γ durch g mit ϵ (Fig.3.9). Wir wählen γ in einem Riß projizierend (Fig.3.10). Die Sichtbarkeit bezüglich eines als undurchsichtig angenommenen Zwickels von c kann unter Benützung der Blickpfeile sofort entschieden werden: Die Sichtbarkeit in einem Riß entscheidet sich im gepaarten Riß (Fig.3.10).

Die Fig.3.9 zeigt, wie der Schnittpunkt $\{S\}=g \cap \epsilon$ im Raum entsteht, woraus sich die Konstruktion, und zwar für alle Abbildungsverfahren, also auch für kotierte Projektion oder Perspektive

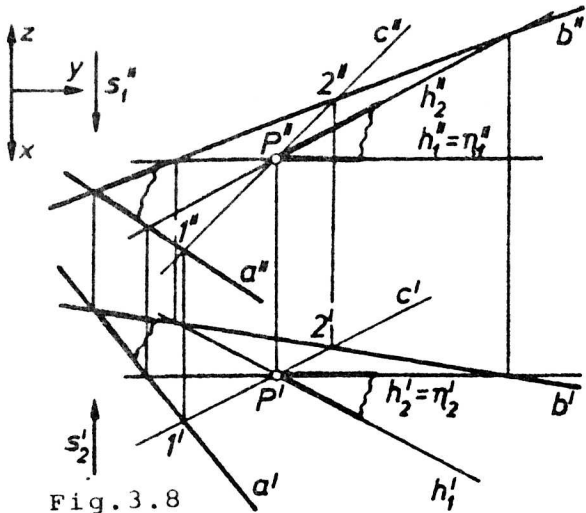


Fig. 3.8

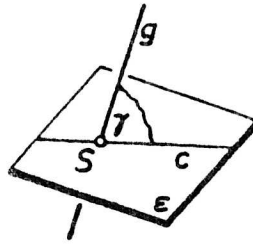


Fig. 3.9



Fig. 3.11

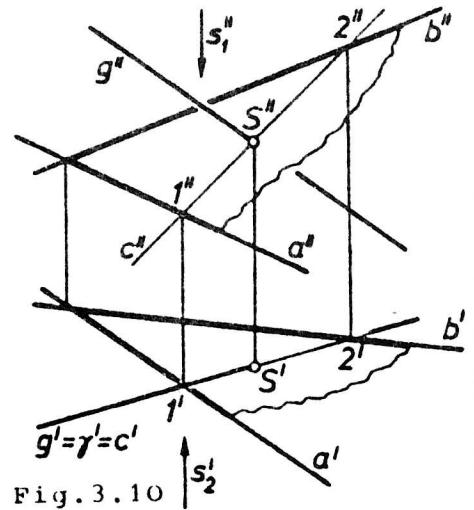


Fig. 3.10

ergibt; dies liefert die Schlußweise "S' muß auf g' liegen, und daraus ergibt sich S'', da S in ϵ liegt" nicht.

Die Schnittgerade s zweier Ebenen $\epsilon = ab$ und φ wird als die Verbindungsgerade der Schnittpunkte $A = a \cap \varphi$ und $B = b \cap \varphi$ der beiden Zwickelgeraden a, b von ϵ mit der Ebene φ gefunden.

Durch die obigen Überlegungen sind alle Lageaufgaben auf das Angittern einer Geraden an einen Zwickel (Streifen) zurückgeführt.

Man vermeide in gepaarten Normalrissen die Festlegung einer Geraden bzw. einer Ebene durch ihre Spurpunkte bzw. ihre Spuren und verwende Spuren nicht bei Konstruktionen. Ein Zwickel ist ungleich anschaulicher als die, falsche Vorstellungen suggerierende Darstellung mit Hilfe der Spuren (vgl. Fig. 3.11); außerdem sind Spurelemente nur selten auf dem Zeichenblatt, wenn man die Angabe nicht extra danach wählt (vgl. Fig. 3.15).

Neue Begriffe sollen nur eingeführt werden, falls dies vom Schüler als notwendig empfunden wird. Aus diesen Gründen sind die Begriffe Deckpunkt und Deckgerade wohl entbehrlich; die Bezeichnung "angittern" ist wegen ihres anschaulichen Inhalts zweckmäßig.

Von *Fallgeraden* einer Ebene sollte man nur bezüglich der horizontalen Stellung sprechen. Damit scheidet dieser Begriff im Zusammenhang mit gepaarten Normalrissen oder Perspektive aus und wird auch nicht benötigt; in der kotierten Projektion ist dieser Begriff von Bedeutung.

3.4 Maßaufgaben

Im Sinne einer ökonomischen Behandlung der Grundaufgaben genügt es, je einen Lösungsweg für die drei Maßaufgaben zu besprechen und anzugeben, wie man alle Maßaufgaben auf diese drei zurückführen kann. Sonderlagen zuerst zu behandeln ist nicht günstig, da diese den räumlichen Lösungsgang nicht klar erkennen lassen.

M1: Wahre Länge einer Strecke

Schon bei der Diskussion der Risse einfacher, mit dem Ko-

ordinatensystem verknüpfter Objekte wird die wahre Länge einer Strecke etwa bei der Konstruktion des Netzes einer Pyramide oder bei der Ermittlung des Materialbedarfs zur Eindeckung eines Walmdaches (Fig.3.3) besprochen und durch Konstruktion der wahren Größe eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem etwa der Abstand $\overline{P\eta_1}$ des Punktes P von der ersten Hauptebene η_1 durch Q auftritt, ermittelt.

Dieses Dreieck kann zunächst neben den Rissen gezeichnet werden; zweckmäßig wird dann eine Kathete in (P',Q') oder die Kathete der Länge $\overline{P\eta_1}$ im Aufriß geschickt gewählt (Fig.3.2). Gleichzeitig ist das Abtragen einer Strecke auf einer Geraden von einem Punkt aus mit Hilfe eines Hilfspunktes zu üben. Der Sonderfall von Strecken auf Hauptgeraden wird durch 2.3,7 erledigt.

M2: *Wahre Abmessungen einer ebenen Figur*

Als Vorbereitung wird die Drehung um eine Achse a anhand einer Skizze (Fig.3.12) besprochen:

- (1) Jeder Punkt $P \notin a$ beschreibt einen *Bahnkreis* k mit a als *Drehachse* d.h., a geht durch den Mittelpunkt M von k und ist orthogonal zur Ebene von k . Jeder Punkt R von a ist Fixpunkt der Drehung.
- (2) Jede Ebene ϵ kann um eine Gerade $a \subset \epsilon$ in eine Hauptebene ϵ_0 parallel zur Bildebene π gedreht werden; wegen $a \subset \epsilon_0$ ist die Drehachse a dabei notwendig eine Hauptgerade h in ϵ . Jede Figur in ϵ_0 besitzt nach 2.3,6 einen unverzerrten Normalriß in π .
- (3) Die Anfangslage (M,P) des Drehkreisradius in ϵ und seine Endlage (M,P_0) in $\epsilon_0 \parallel \pi$ sind orthogonal zur Drehachse h , was $M^n P^n \perp h^n$, $M^n P_0^n \perp h^n$ nach 2.4, (N) und $\overline{M^n P_0^n} = \overline{MP_0} = \overline{MP} (=r)$ nach 2.3,7 zur Folge hat (Fig.3.13 zeigt eine Drehung parallel zu π_1).

Bem.: (a) Da ϵ_0 die erste Hauptebene durch h_1 ist, folgt $\overline{P\epsilon_0} = \overline{P''\epsilon_0} = \overline{P''h_1}$ nach 3.2,3. Wählt man das Dreieck zur Ermittlung von $r = \overline{MP}$ geschickt, so kommt man mit dem Stechzirkel aus (Fig.3.13).

(b) Es ist stets nur ein Punkt von ϵ tatsächlich zu drehen und dann zu benützen:

- 1. Für $Q \in \epsilon, Q \notin h$ ist $Q^n Q_0^n$ stets orthogonal zu h^n ; für $R \in h$ ist $R^n = R_0^n$ (Fig.3.13).
- 2. Für $g \subset \epsilon$ und $g \not\parallel h$ enthält g_0 den Fixpunkt $g \cap h$.
- 3. Für $g \subset \epsilon$ und $g \parallel h$ ist $g_0 \parallel h$.

Damit wird die konstruktive Behandlung der perspektiven Affinität vorbereitet (vgl.5.2).

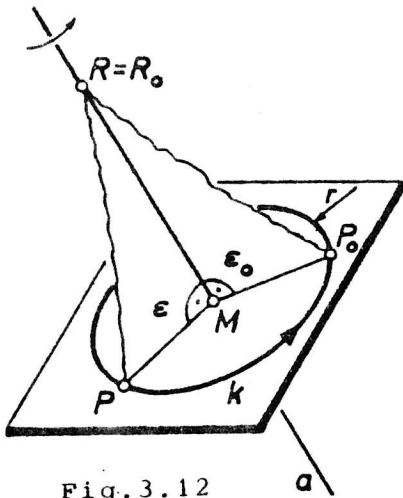


Fig. 3.12

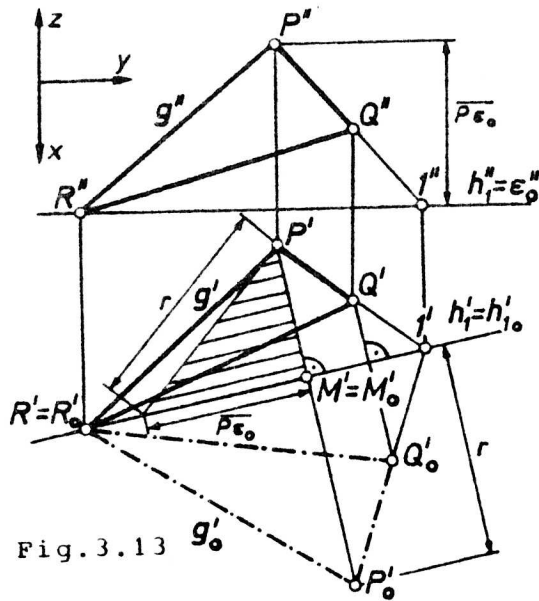


Fig. 3.13

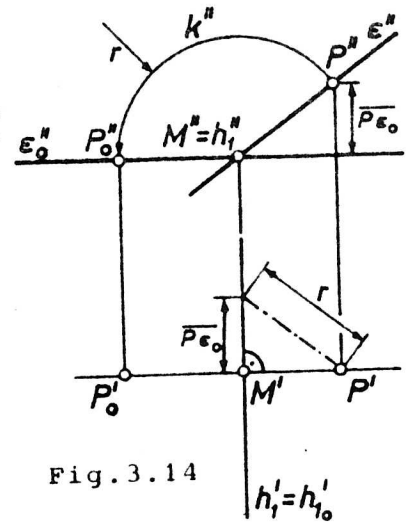


Fig. 3.14

(c) Für eine projizierende Ebene ϵ ändert sich die Konstruktionsidee nicht. Ist die Drehachse h projizierend, so erscheint der Drehkreisradius (P, M) im Normalriß unverzerrt; da alle Bahnkreise dann in Hauptebenen liegen, sind die Normalrisse der Bahnkreise unverzerrt (vgl. Fig. 3.14 für eine zweitprojizierende Ebene).

M3: Orthogonale Lage einer Geraden und einer Ebene

Ist eine Gerade n zu einer Ebene ϵ normal, so muß der Normalriß von n nach 2.4, (N) orthogonal zum Normalriß einer Hauptgeraden h von ϵ sein, falls ϵ keine Hauptebene ist,

Fig. 3.15 zeigt in Auf- und Kreuzriß die Konstruktion der Symmetrieebene einer Strecke (A, B) .

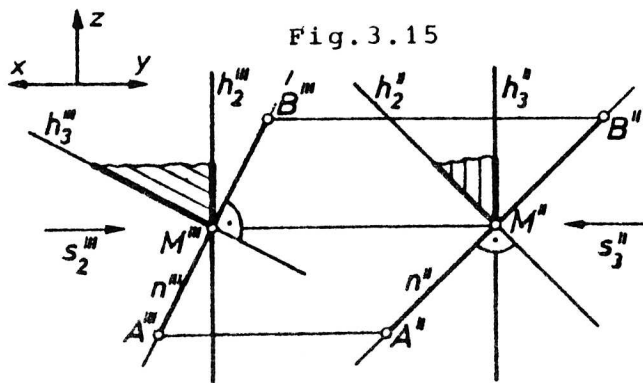


Fig. 3.15

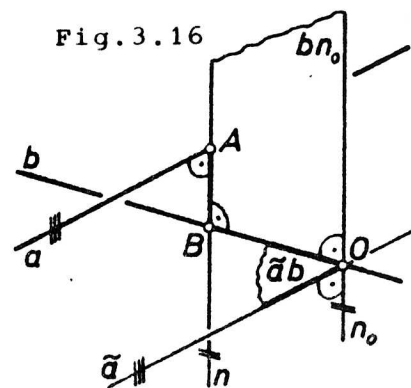


Fig. 3.16

Alle Maßaufgaben, also Aufgaben über Winkelmaße und Abstände, können auf M1, M2 und M3 zurückgeführt werden:

Winkelaufgaben (vgl. 1.2):

1. a schneidet b : $\sphericalangle a, b$ ist eine ebene Figur ... M2.
2. a windschief b : $\sphericalangle a, b = \sphericalangle \tilde{a}, b$ gemäß 1.2, Bem. (c) ... M2.
3. $\sphericalangle \varepsilon, g = 90^\circ - \sphericalangle n, g$ gemäß 1.2 ... M3, M2.
4. $\sphericalangle \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \sphericalangle n_1, n_2$ gemäß 1.2 ... M3, M2.

Bem.: (d) Ist die Schnittgerade zweier Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in einem Normalriß projizierend, so stimmt nach 1.2, Bem. (h) das Winkelmaß $\sphericalangle \varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit dem Winkelmaß $\sphericalangle \varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n$ überein.

Abstandsaufgaben:

1. \overline{PQ} ... M1
2. \overline{Pg} für $P \notin g$: In der Ebene Pg gibt es genau eine Normale n zu g durch P . Mit $\{N\} = n \cap g$ ist $\overline{Pg} = \overline{PN}$... M2.
 $\overline{Pg} = 0$ für $P \in g$.
 Ist $a \parallel g$, so gilt $\overline{Pg} = \overline{Qg}$ für alle $P, Q \in a$; wir erklären $\overline{ag} = \overline{Pg}$.
3. $\overline{P\varepsilon}$ für $P \notin \varepsilon$: Durch P gibt es nach M3 genau eine Normale n zu ε . Mit $\{N\} = n \cap \varepsilon$ ist $\overline{P\varepsilon} = \overline{PN}$... M3, M1.
 $\overline{P\varepsilon} = 0$ für $P \in \varepsilon$.
 Ist $a \parallel \varepsilon$, so gilt $\overline{P\varepsilon} = \overline{Q\varepsilon}$ für alle $P, Q \in a$; wir erklären $\overline{a\varepsilon} = \overline{P\varepsilon}$.
4. a windschief b : Es gibt genau eine a und b schneidende gemeinsame Normale n (vgl. 1.2 zur Bezeichnung "Gemeinlot"), wie folgende Überlegung zeigt (Fig. 3.16):
 - (1) Für $O \in b$ und $a \parallel \tilde{a}$ mit $O \in \tilde{a}$ ist n notwendig normal \tilde{a} und normal b .
 - (2) Ist $n_0 \perp \tilde{a}b$ mit $O \in n_0$, so liegt n notwendig in der Ebene bn_0 .
 - (3) n geht notwendig durch $\{A\} = a \cap bn_0$ und ist zu n_0 parallel; die Gerade durch A parallel n_0 schneidet b in einem Punkt B .

Damit ist die eindeutige Existenz von n gezeigt und der Konstruktionsvorgang beschrieben.

$\overline{ab} = \overline{AB}$... M3, M1.

3.5 Seitenrisse

Ist ein Objekt in gepaarten Normalrissen dargestellt, so kann daraus ein *Seitenriß* genannter neuer Normalriß konstruiert werden, falls die "neuen" projizierenden Geraden Hauptgeraden bezüglich einer der beiden "alten" Bildebenen, etwa der Grundrißebene π_1 sind; Grund- und Seitenriß sind dann gepaarte Normalrisse. Insbesondere ist der Kreuzriß ein zum Grundriß und zum Aufriß gepaarter Seitenriß.

Der in der Seitenrißebene π_3 liegende Seitenriß wird unter Berücksichtigung der Orientierung der zu π_3 normalen Sehstrahlen s_3 richtig (vgl.2.2) in die Zeichenebene verlagert.

Soll der Seitenriß zum Grundriß gepaart sein, muß man s_3 als orientierte erste Hauptgerade wählen. Legt man den Seitenriß in geordnete Lage zum Grundriß, so sind nach 3.2,2 und Bem.(c) die den Grund- und den Seitenriß koppelnden Ordner parallel s'_3 und die Pfeile von s'_3 und s'''_1 entgegengesetzt orientiert. Gibt man von einem Punkt P den Seitenriß P''' beliebig auf einem zu s'_3 parallelen neuen Ordner durch P' vor, so erscheint nach 3.2,1 die erste Hauptebene η_1 durch P im Aufriß bzw. Seitenriß als die zu s''_1 bzw. s'''_1 normale Gerade η''_1 bzw. η'''_1 . Da der auf einem ersten Sehstrahl liegende Abstand $\overline{Q\eta_1}$ eines Punktes Q von η_1 im zum Grundriß gepaarten Aufriß und Seitenriß nach 3.2,3 in wahrer Länge zu sehen ist (vgl.Fig.3.17), kann Q''' aus Q'' unter Beachtung der Orientierungen von s''_1 und s'''_1 eingetragen werden (Fig.3.18).

Bem.: (a) Um einen zum Grundriß gepaarten Seitenriß in geordneter Lage festzulegen, muß man also s'_3 samt Orientierung und von einem Punkt P den Seitenriß P''' auf einem zu s'_3 parallelen neuen Ordner durch P' angeben. Durch s'_3 samt Orientierung ist s''_1 samt Orientierung nach 3.2,2 und Bem.(c) mitbestimmt.

(b) Für das richtige Abtragen der "wegfallenden Abstände" sind die Blickpfeile eine wertvolle Hilfe und spielen bei Sichtbarkeitsfragen eine entscheidende Rolle.

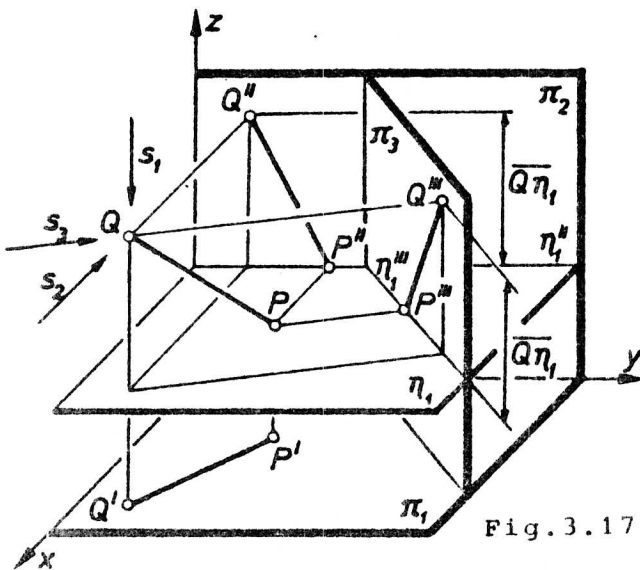


Fig. 3.17

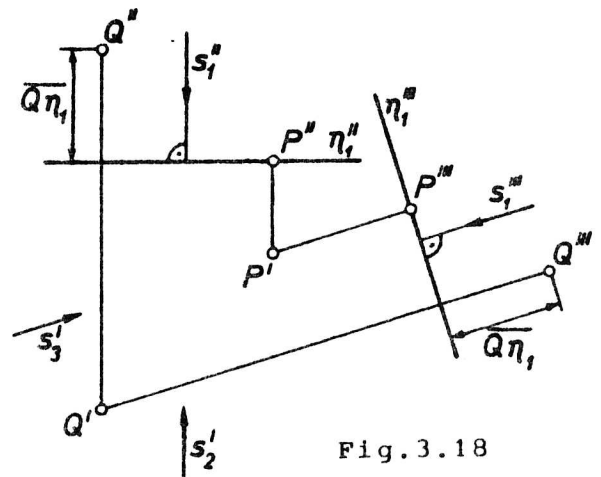


Fig. 3.18

Seitenrisse werden vor allem als Konstruktionshilfsmittel verwendet. Es genügt, die Lösung der folgenden beiden Aufgaben zu beherrschen:

(S1) Eine weder erst- noch zweitprojizierende Ebene ϵ soll projizierend werden. Für einen zum Grundriß gepaarten Seitenriß ist eine erste Hauptgerade $h_1 \subset \epsilon$ notwendig eine neue projizierende Gerade s_3 (zur Angabe des Seitenrisses benützt man zweckmäßig einen Punkt $P \in h_1$, was $P''' = h_1'''$ nach sich zieht, Fig.3.19). Anwendung auf ebene Schnitte.

(S2) Eine weder zu π_1 noch zu π_2 parallele Gerade g soll eine Hauptgerade werden. Für einen zum Grundriß gepaarten Seitenriß ist nach 3.2, Bem.(a) der Grundriß g' von g notwendig normal zum Grundriß s_3' einer neuen projizierenden Geraden s_3 . (Man wählt zweckmäßig $P' = P'''$ für einen Punkt $P \in g$, Fig.3.20). Damit kann M1 neu gedeutet werden.

Man erhält einen anschaulichen Normalriß eines Objekts, das einen unanschaulichen, aber einfach zu zeichnenden Grund- und Aufriß besitzt, wenn man einen neuen Sehstrahl s benützt, der weder erste noch zweite Hauptgerade ist. Dazu wird zuerst nach (S2) ein Seitenriß so eingeführt, daß s eine dritte Hauptgerade h_3 wird; dann kann $s = h_3$ als Sehstrahl eines weiteren Seitenrisses verwendet werden. Nach dieser Methode ist in Fig.3.21 ein Winkel-eisen dargestellt. Nach 3.2,2 ergibt sich die Sichtbarkeit in jedem Riß.

Eine zu s normale Ebene ist Hauptebene bezüglich der zu s normalen Bildebene.

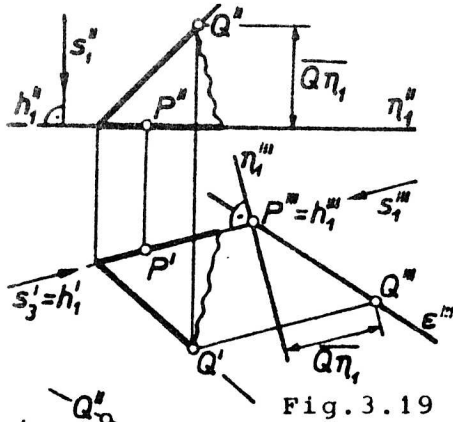


Fig. 3.19

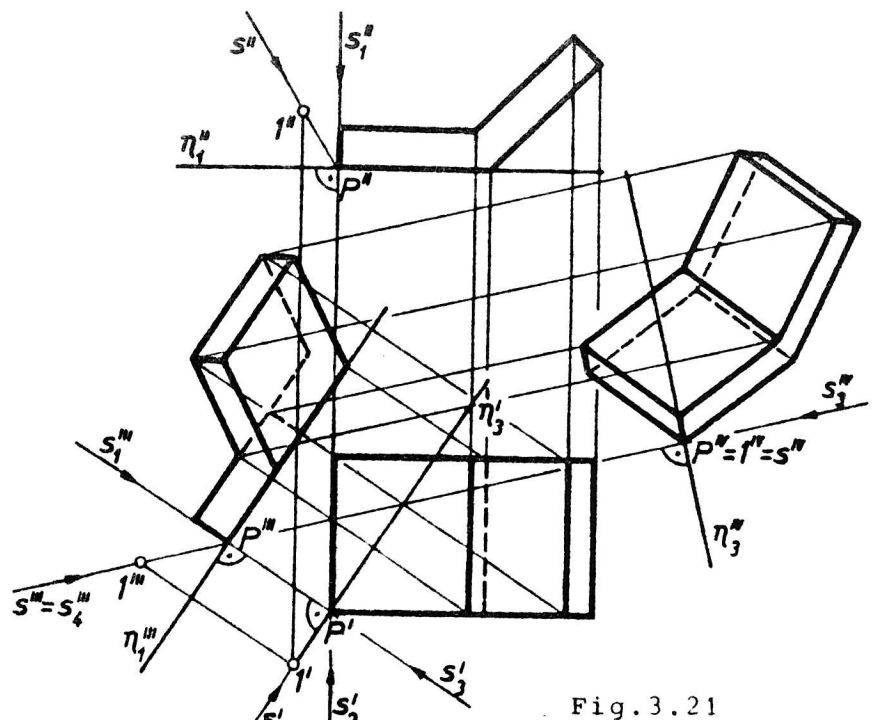
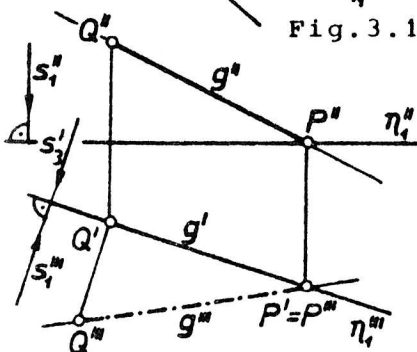


Fig. 3.21

Die Axonometrie liefert wesentlich schneller anschauliche Bilder, wobei außerdem die Bildqualität des Ergebnisses an Hand der Angabe der Axonometrie überprüft werden kann (vgl. auch 4.3).

4. Axonometrie

Die fortlaufende Verwendung anschaulicher Skizzen sowie die Einführung von Grund- und Aufriß mit Hilfe des Koordinatensystems legen die frühzeitige Besprechung der Axonometrie nahe. Dieses einfache Verfahren eignet sich hervorragend zur Anfertigung anschaulich wirkender Bilder; solche schulen die räumliche Vorstellung und motivieren die Schüler stärker als theoretische Beispiele in gepaarten Normalrissen.

Da die Vorteile der normalen Axonometrie erst bei der Kreisdarstellung und dem Umriß einer Kugelfläche voll zum Tragen kommen, sollte zuerst die Axonometrie und erst später der Sonderfall der normalen Axonometrie behandelt werden.

4.1 Axonometrische Abbildungsvorschrift

Wird ein kartesisches Rechtssystem $\{x, y, z\}$ auf eine Bildebene π parallelprojiziert und sind die zu π nicht parallelen Sehstrahlen zu keiner Koordinatenebene parallel, so erhält man drei paarweise verschiedene Geraden x^P, y^P, z^P , die vom Riß U^P des Ursprungs U ausgehen. Wir legen den Parallelriß richtig (vgl. 2.2) in eine Zeichenebene, und zwar so, daß die z^P -Achse in der Zeichenebene parallel zum linken Zeichenblattrand und zum oberen Zeichenblattrand hin orientiert ist. Je nachdem dann in der Zeichenebene die "kürzeste" Drehung des Orientierungspfeiles der x^P -Achse in den Orientierungspfeil der y^P -Achse positiv oder negativ ist, zeigt der Parallelriß die Oberseite oder die Unterseite der Grundrißebene π , des räumlichen Koordinatensystems; eine *Obersicht* bzw. *Untersicht* ist somit an der Orientierung der Bilder der beschrifteten Koordinatenachsen zu erkennen (Fig. 4.1).

Aus 2.3,10 folgt, daß die x - bzw. y - bzw. z -Koordinaten aller Objektpunkte mit demselben Faktor λ bzw. μ bzw. ν verzerrt werden. Mit Hilfe dieser *Verzerrungen* können die Koordinaten x, y, z eines Punktes P gemäß

$$(1) \quad x^P = \lambda x, \quad y^P = \mu y, \quad z^P = \nu z \quad \lambda, \mu, \nu > 0$$

verzerrt und unter Ausnützung der Parallelentreue 2.3,8 kann der Parallelriß eines Koordinatenweges von P in den Parallelriß des Koordinatensystems eingetragen werden. Ein solcher Koordinatenweg

führt über den *axonometrischen Grundriß* P^1P oder über den *axonometrischen Aufriß* $P''P$ oder über den *axonometrischen Kreuzriß* $P'''P$ (Fig.4.2).

Für das praktische Zeichnen ist der 1853 von K. POHLKE bewiesene Satz grundlegend: Gibt man die paarweise verschiedenen Achsenbilder x^P, y^P, z^P und die Verzerrungen λ, μ, ν beliebig vor, so ist das unter Benützung von (1) und der Parallelentreue konstruierte Bild eines Objekts stets ein Parallelriß eines zum gegebenen Objekt ähnlichen Objekts. Diese Abbildungsvorschrift, die sich auf eine axonometrische Angabe $\{x^P, y^P, z^P; \lambda, \mu, \nu\}$ stützt, heißt *Axonometrie*, das entstehende Bild ein *axonometrischer Riß*.

Bem.: (a) Durch die axonometrische Angabe ist der Ähnlichkeitsfaktor zwar mitbestimmt, dem Zeichner aber bei der Konstruktion des axonometrischen Risses nicht bekannt. Da das Dazwischenschalten eines Maßstabs zur Herstellung eines anschaulichen Bildes unwesentlich ist, genügt es, die Verhältnisse $\lambda:\mu:\nu$ der Verzerrungen anzugeben. Durch geeignete Auswahl einer unverzerrt eingetragenen Koordinate zum Beispiel kann stets erreicht werden, daß die beiden anderen Verzerrungen kleiner als 2 sind (z.B. $\lambda:\mu:\nu=3:4:5$ mit $\mu=1, \lambda=3:4, \nu=5:4$, vgl. Fig.4.2).

Für $\lambda, \mu, \nu < 2$ (vgl. (a)) wird jede Koordinate graphisch mit Hilfe eines *Verzerrungswinkels* verzerrt: Ist r der Radius eines Hilfskreises und λr die Länge einer Kreissehne, so wird x auf den Schenkeln des entstehenden Winkels vom Winkelscheitel aus abgeschlagen und $x^P = \lambda x$ als Abstand der beiden Endpunkte abgegriffen (Fig.4.2); analoges gilt für die y - und die z -Koordinaten. Sind zur Festlegung des Objekts Winkelangaben oder die Länge von nicht koordinatenparallelen Strecken angegeben, so werden diese Daten mittels einer Hilfsfigur in Koordinatenangaben umgewandelt; soll das Objekt in einem bestimmten Maßstab dargestellt werden, so ist die Hilfsfigur in diesem Maßstab zu zeichnen (in Fig.4.2 wird eine Maßstabskala verwendet).

Bem.: (b) Die durch die axonometrische Angabe mitbestimmten Sehstrahlen fallen unter Umständen sehr flach gegen die Bildebene ein, sodaß starke Verzerrungen auftreten (Schatten bei tiefstehender Sonne). Das Bild wirkt "unverzerrt", wenn der axonometrische Riß des Koordinatenwürfels zum Punkt $E(1,1,1)$ "wie ein Würfel aussieht" (vgl. Fig.4.1).

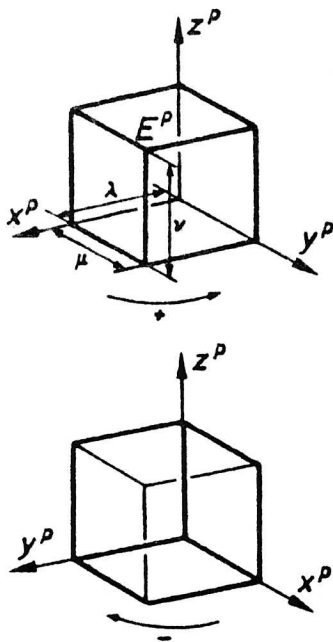


Fig. 4.1

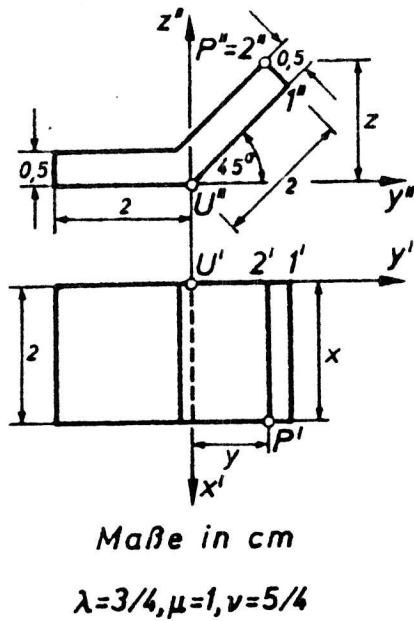
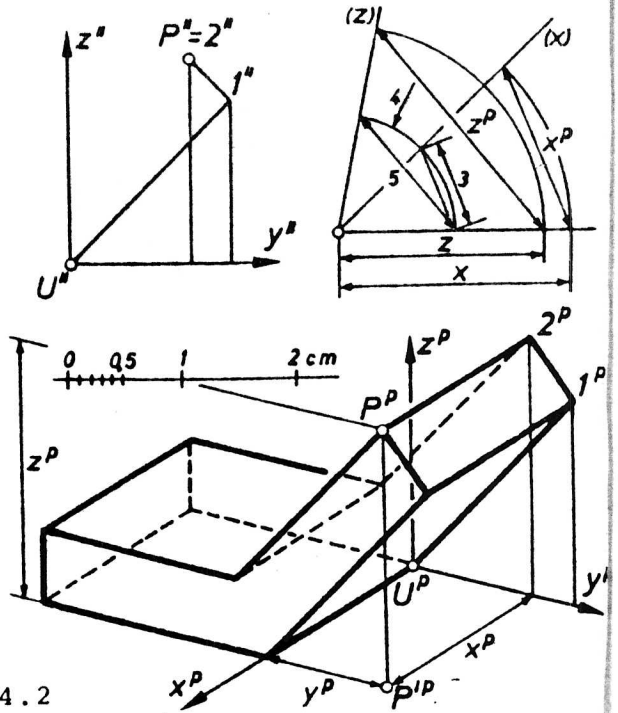


Fig. 4.2



(c) Für $\lambda=\mu$, $x^P \perp y^P$ ist der axonometrische Riß (abgesehen vom Maßstab) kongruent zu einem Schrägriß in π_1 . Figuren in ersten Hauptebenen ($z=\text{konst.}$) erscheinen bei dieser *Militärprojektion* in wahrer Gestalt, sodaß ein *Militärriß* direkt mit Hilfe eines "verdreht" hingelegten Grundrisses aufgebaut werden kann. (Übliche Angaben $\lambda=\mu=\nu$ und Fig. 4.3).

(d) Für $\mu=\nu$, $y^P \perp z^P$ ist der axonometrische Riß (abgesehen vom Maßstab) kongruent zu einem Schrägriß in π_2 . Figuren in zweiten Hauptebenen ($x=\text{konst.}$) erscheinen bei dieser *frontalen Axonometrie* in wahrer Gestalt; ein *Frontalriß* kann direkt mit Hilfe des Aufrisses aufgebaut werden. (Übliche Angaben $\lambda=\mu=\nu$ und Fig. 4.4).

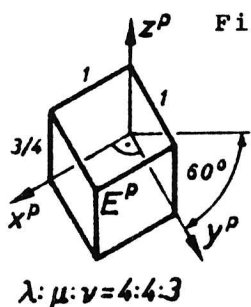


Fig. 4.3

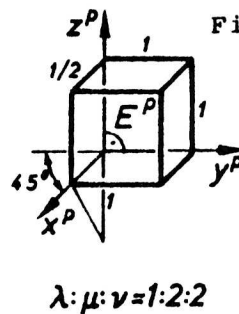
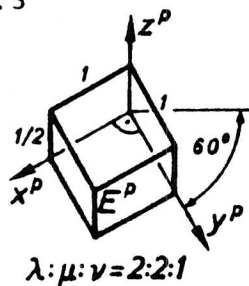
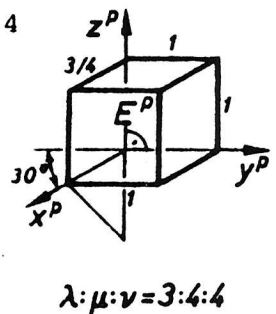


Fig. 4.4



Bei frontaler Axonometrie können die im Grundriß auftretenden x -Koordinaten gemäß Fig. 4.4 schnell verzerrt werden; der Begriff *Projektionsdreieck* sollte vermieden werden. Auch bei dieser speziellen Axonometrie ist die Sichtbarkeit durch die Beschriftung der Achsen mitbestimmt, was schon im Fach "Geometrisches Zeichnen" zu berücksichtigen ist.

Bei der *normalen Axonometrie* (vgl. 4.3) stehen die durch die axonometrische Angabe mitbestimmten Sehstrahlen normal zur Bild-

ebene. Die Bezeichnung *schiefe Axonometrie* ist in der Schule unzweckmäßig. Da eine beliebig vorgegebene axonometrische Angabe $\{x^P, y^P, z^P; \lambda, \mu, \nu\}$ auch auf eine normale Axonometrie führen kann, müßte man sonst "schiefe Axonometrie" anstelle von "Axonometrie" als Überbegriff für normale Axonometrie verwenden.

4.2 Einschneideverfahren

Dieses zur Herstellung anschaulicher Bilder sehr geeignete Verfahren, dessen einziger Nachteil der erhöhte Platzbedarf ist, sollte in der Schule nicht nur für normale Axonometrie besprochen werden.

Wir legen zwei gepaarte Normalrisse, etwa Grund- und Aufriß, in die Zeichenebene, ziehen durch die Grundrisse der Objektpunkte *Einschneidegeraden* parallel zum linken Blattrand, durch die Aufrisse parallele *Einschneidegeraden* anderer Richtung und schneiden stets zusammengehörende *Einschneidegeraden* (Fig.4.5).

Sind die zum Grundriß bzw. zum Aufriß gehörenden *Einschneidegeraden* zu keiner Achse des mit dem Grund- bzw. Aufriß verknüpften Koordinatensystems parallel, so ist das beim Einschneiden entstehende Bild ein axonometrischer Riß.

Beweis. Alle x -parallelen bzw. z -parallelen Strecken sind im Aufriß bzw. im Grundriß projizierend und daher im beim Einschneiden entstehenden Bild zu den betreffenden *Einschneidegeraden*, also zueinander parallel. Die *Einschneidegeraden* durch die Grundrisse der Endpunkte einer y -parallelen Strecke bilden mit den *Einschneidegeraden* durch ihre Aufrisse gemäß den Voraussetzungen ein Parallelogramm (vgl. Fig.4.5), dessen eine Diagonale das Bild der Strecke ist. Da diese Parallelogramme für alle y -parallelen Strecken jeweils parallele Seiten besitzen und nach dem Strahlensatz zueinander ähnlich sind, haben alle y -parallelen Strecken parallele Bilder.

Nach dem Strahlensatz stimmt das Verhältnis zweier y -Koordinaten im Grundriß und im beim Einschneiden entstehenden Bild überein, und analoges gilt für die x - und z -Koordinaten. Nach 4.1 liefert Einschneiden daher einen axonometrischen Riß, da nach den Voraussetzungen die Koordinatenachsen paarweise verschiedene Bilder besitzen.

□

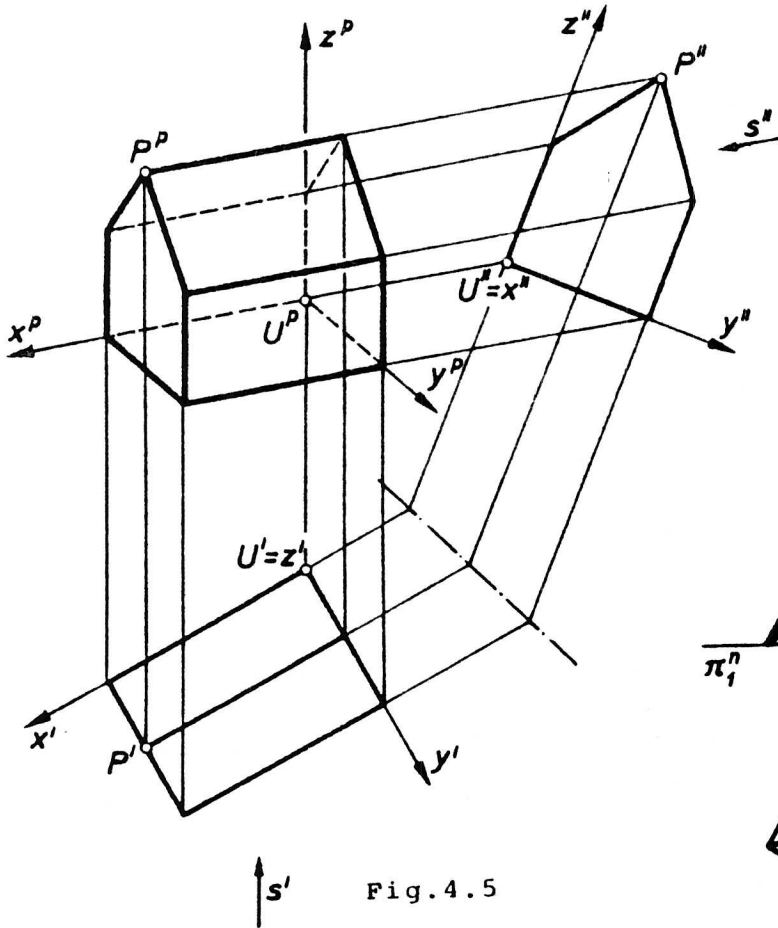


Fig. 4.5

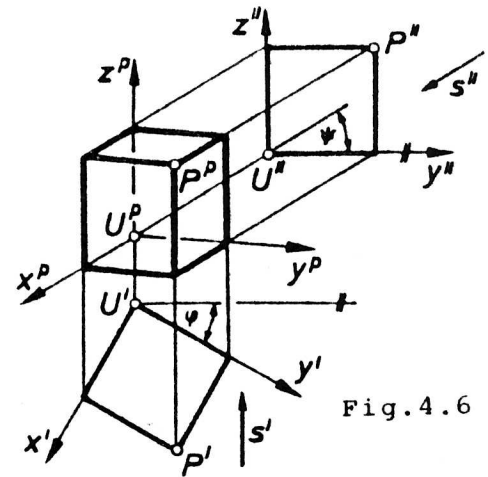


Fig. 4.6

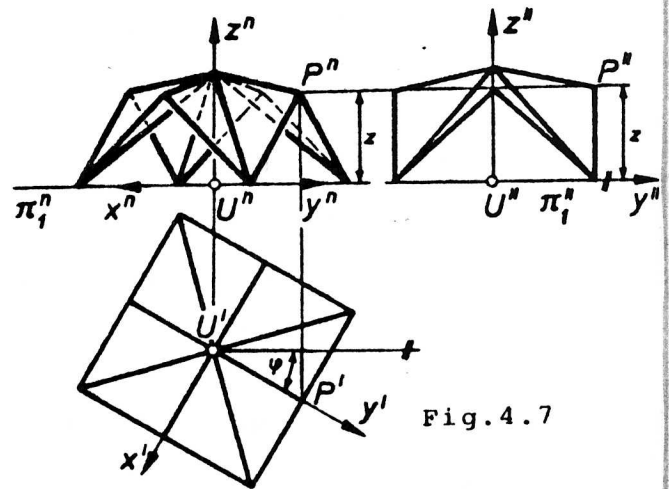


Fig. 4.7

Bem.: (a) Bei einem *Einschneidegrundriß* faßt man die x - und die y -Achse zweckmäßig als die Menge der Grundrisse ihrer Punkte auf und beschriftet deshalb mit $x', y',$ usw. (vgl. dagegen 3.1).

Gemäß der Wahl der zum Grundriß gehörenden *Einschneidegeraden* ist z^P parallel zum linken Zeichenblattrand; der *Einschneideaufriß* ist so in das Zeichenblatt zu legen, daß z^P nach oben orientiert ist. Aus den Orientierungspfeilen von x^P und y^P , die sich durch *Einschneiden* der x - und der y -Achse ergeben, kann nach 4.1 abgelesen werden, ob *Obersicht* oder *Untersicht* vorliegt. Die Brauchbarkeit einer Angabe wird mit Hilfe des Koordinatenwürfels von $E(1,1,1)$ überprüft (vgl. 4.1, (b)). Da jeder Sehstrahl s der Axonometrie einen punktförmigen axonometrischen Riß s^P besitzt, ist s' bzw. s'' parallel zu den zum Grundriß bzw. zum *Aufriß* gehörenden *Einschneidegeraden*; die Orientierung der Sehstrahlen ergibt sich, je nachdem *Obersicht* oder *Untersicht* vorliegt (vgl. Fig. 4.5).

Bem.: (b) Vor dem *Einschneiden* muß man von jedem Objektpunkt den Grundriß und den *Aufriß* aufsuchen. Das geschieht mit Hilfe der doppelt auftretenden y -Koordinaten oder mit Hilfe *gebrochener Ordner*: Die x' -Parallele durch P' und die z'' -Parallele durch P''

schneiden einander stets auf einer Geraden (*Ordnerachse*), wie aus dem Strahlensatz folgt (vgl. Fig. 4.5). Mit Hilfe dieser gebrochenen Ordner können im Einschneidegrundriß und Einschneideaufriß, also in zwei gepaarten Normalrissen, die nicht in geordneter Lage sind, mit Hilfe von 3.2, 1, 2 und 3 jene Konstruktionen durchgeführt werden, die in geordneter Lage bekannt sind.

Beim *Schnellriß* (Fig. 4.6) wird der Grundriß um einen Winkel φ (meist 15° oder 30°) verdreht aufs Zeichenblatt gelegt; die Einschneidegeraden zum wie üblich liegenden Aufriß sind unter einem Winkel ψ (meist 30° oder 45°) gegen die y -Achse geneigt. Ist speziell $\psi=0^\circ$, so entsteht nach Fig. 4.7 durch Einschneiden ein zum Grundriß gepaarter Seitenriß in geordneter Lage (vgl. 3.5), also ein Normalriß; wegen $x^n=y^n$ ist dieser nicht als axonometrischer Riß anzusprechen.

4.3 Normale Axonometrie

Im Falle einer normalen Axonometrie (vgl. 4.1) beherrschen wir das Paralleldrehen jeder Koordinatenebene um eine ihrer Hauptgeraden, falls die normalaxonometrischen Risse x^n, y^n, z^n der Koordinatenachsen bekannt sind. Da eine zur Bildebene der Axonometrie parallele Hauptgerade h von π_1 , nämlich zur z -Achse orthogonal ist, muß nach 2.4, (N) notwendig $h^n \perp z^n$ gelten; wir wählen h nicht durch den Ursprung U . Die Schnittpunkte $\{X\}=x \cap h$ und $\{Y\}=y \cap h$ bleiben beim Paralleldrehen fest ($X=X_0, Y=Y_0$), und U wandert nach 3.4 auf einem Bahnkreis mit der Drehachse h nach U_0 ; für seinen Mittelpunkt M auf h gilt $M^n U^n \perp h^n, M^n U_0^n \perp h^n$ nach 3.4, was $U_0^n \in z^n$ nach sich zieht. Wegen $\sphericalangle X_0^n U_0^n Y_0^n = 90^\circ$ liegt U_0^n im Schnitt von z^n mit dem Thaleskreis über der Strecke $(X^n, Y^n) = (X_0^n, Y_0^n)$ (Fig. 4.8).

Verlangt man, daß der normalaxonometrische Riß nicht nur ähnlich, sondern *kongruent* zu einem Normalriß ist, so gilt $\lambda = \overline{U^n X^n} : \overline{U_0^n X^n}$ und $\mu = \overline{U^n Y^n} : \overline{U_0^n Y^n}$; dabei ist $0 < \lambda, \mu < 1$, da nach 3.4, M1 in einem Normalriß jede Strecke, die auf keiner Hauptgeraden liegt, verkürzt erscheint. Um die Verzerrung v zu erhalten, denken wir etwa die yz -Ebene π_2 um ihre Hauptgerade durch Y parallelgedreht (der Normalriß einer Hauptgeraden in π_2 ist zu x^n orthogonal), wobei U in einem Punkt U^0 übergeht. Dann liegt U^{0n} auf x^n und es gilt

¹ Wegen $y^n \neq z^n$ ist x nach 2.4, (N) keine Hauptgerade, und analoges gilt für y und z .

$\overline{U^0 n Y^n} = \overline{U Y} = \overline{U_0^n Y^n}$ (Fig.4.8). Mit $\{Z^n\} = z^{0n} \cap z^n = \{Z^{0n}\}$ ergibt sich $v = \overline{U^n Z^n} : \overline{U^{0n} Z^n}$. Damit können die Verzerrungswinkel gezeichnet (Fig.4.8) und der normalaxonometrische Riß gemäß 4.1 konstruiert werden; die Sichtbarkeit ist nach 4.1 durch die Beschriftung der Bilder der Koordinatenachsen festgelegt.

Bem.: (a) Beim Paralleldrehen von π_1 oder π_2 ist zweckmäßig stets so zu drehen, daß $\{x_0^n, y_0^n\}$ bzw. $\{y^{0n}, z^{0n}\}$ ein ebenes Rechtssystem wird.

Die Punkte X, Y, Z liegen in einer Hauptebene. Die Geraden x^n, y^n, z^n sind Höhen des Dreiecks $\{X^n, Y^n, Z^n\}$ und daher ist U^n der Höhenschnittpunkt. Wegen $\lambda, \mu, \nu < 1$ sind die Winkel $\angle X^n U^n Y^n, \angle Y^n U^n Z^n, \angle Z^n U^n X^n$ stumpf; dann ist aber der Höhenschnittpunkt U^n ein Innenpunkt des Dreiecks $\{X^n, Y^n, Z^n\}$ und dieses daher spitzwinkelig.

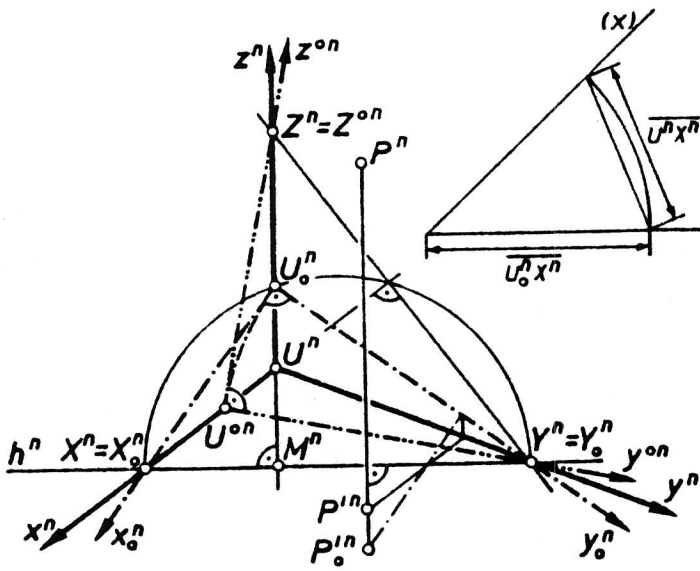


Fig.4.8

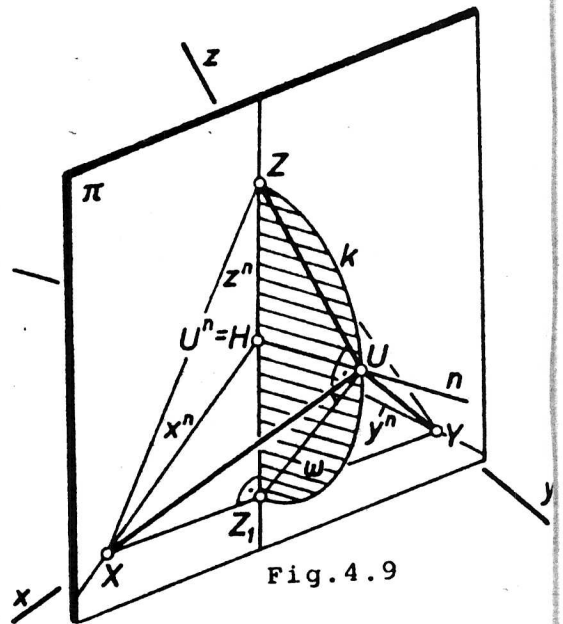


Fig.4.9

Umgekehrt gilt:

Die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks $\{X, Y, Z\}$ können stets als Normalrisse von drei paarweise orthogonalen Geraden aufgefaßt werden.

Beweis. Die Höhe z^n durch Z schneidet die Seite XY des spitzwinkligen Dreiecks in einem zwischen X und Y liegenden Punkt Z_1 (Fig.4.9). Sei U einer der beiden Schnittpunkte der zur Ebene $\pi = XYZ$ normalen Geraden n durch den im Inneren des spitzwinkligen Dreiecks liegenden Höhenschnittpunkt H mit dem Kreis k zum Durchmesser (Z, Z_1) in der zu π normalen Ebene ω durch z^n . Die Geraden $x = UX, y = UY, z = UZ$ besitzen die Dreieckshöhen als Normalrisse in π ; es bleibt $x \perp y \perp z \perp x$ zu zeigen.

Aus $z \perp UZ_1$ (Satz von THALES) und $z \perp XY$ (wegen $z^n \perp XY$) folgt $z \perp UXY$,

also $z \perp x$ und $z \perp y$ nach 1.2, Bem.(d); aus $x \perp YZ$ (wegen $x^n \perp YZ$) und $x \perp z$ folgt $x \perp UYZ$, also $x \perp y$. □

Bem.: (b) Für eine normalaxonometrische Angabe können somit die nicht orientierten Geraden x^n, y^n, z^n beliebig derart gewählt werden, daß sie Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks sind. Soll der normalaxonometrische Riß kongruent zu einem Normalriß sein, so sind dann die Verzerrungen λ, μ, ν mitbestimmt.

Dieses spitzwinklige Dreieck muß bei einer Angabe nicht gezeichnet werden. Die Spurpunkte der Achsen anzugeben und vom *Spurendreieck* zu reden, ist unnötig.

Der normalaxonometrische Grundriß P'^n eines Punktes P und der normalaxonometrische Riß $P'_o{}^n$ der parallelgedrehten Lage P'_o von P' liegen auf einer z^n -Parallelen (Fig.4.8), welche der normalaxonometrische Riß der zur Drehachse h normalen, also projizierenden Bahnkreisebene von P' ist. Da weiter P'^n und P^n auf einer z^n -Parallelen liegen, kann der normalaxonometrische Riß des parallelgedrehten Grundrisses als Einschneidegrundriß mit zu z^n parallelen Einschneidegeraden benützt werden; aus graphischen Gründen wird der Einschneidegrundriß in der z^n -parallelen Einschneiderichtung aus der Hauptfigur herausgezogen, also U' auf z^n gewählt. Verfährt man mit dem parallelgedrehten Aufriß analog, erhält man das *Einschneideverfahren für normale Axonometrie* (Fig.4.10).

Bem.: (c) Der Einschneidegrundriß und der normalaxonometrische Riß sind zwei Normalrisse in geordneter Lage, die nicht gepaart sind.

Im Gegensatz zu 4.2 wird bei diesem Einschneideverfahren zuerst $\{x^n, y^n, z^n\}$ angegeben und daraus die Lage der Einschneiderisse ermittelt. Man kann aber auch direkt die Lage der Einschneiderisse so bestimmen, daß beim Einschneiden ein normalaxonometrischer Riß entsteht:

Der scheinbare axonometrische Umriß u^P einer Kugelfläche zum Mittelpunkt U ist nach 7.2 eine Ellipse; sie berührt beim Einschneideverfahren gemäß 4.2 jene Einschneidegeraden, welche Tangenten des ersten bzw. zweiten scheinbaren Umrisses u_1' bzw. u_2'' der Kugelfläche sind (Fig.4.11). Die Diagonalen dieses der Ellipse u^P umschriebenen Parallelogramms tragen nach 7.3, Bem.(a) konjugierte Ellipsendurchmesser. Da die Kreise u_1' und u_2'' gleich groß sind, liegt ein u^P umschriebener Rhombus vor, sodaß nach 7.3, Fn.1

die Achsen von u^P den orthogonalen Rhombusdiagonalen angehören. Unter Benützung des axonometrischen Umrißpunktes K auf u_1 , dessen Aufriß sich mit Hilfe der im Grundriß erkennbaren y -Koordinate ergibt, erhält man einen Halbmesser $U^P K^P$ von u^P ; sein konjugierter Halbmesser liegt auf einer zum Grundriß gehörenden Einschneidegeraden.

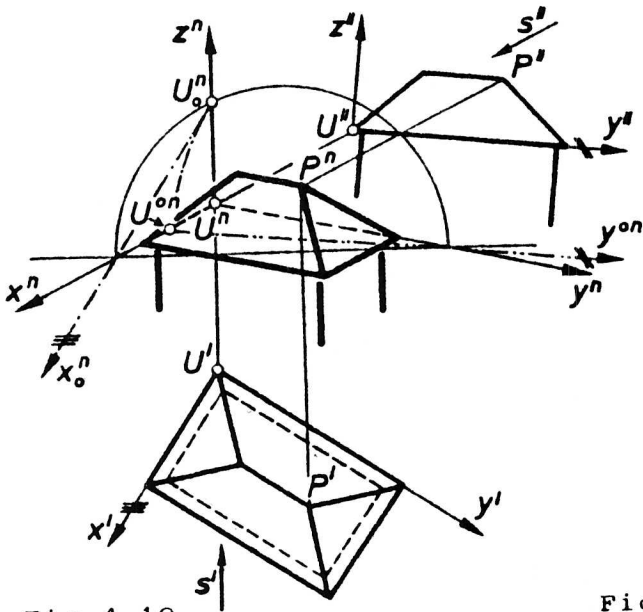


Fig. 4.10

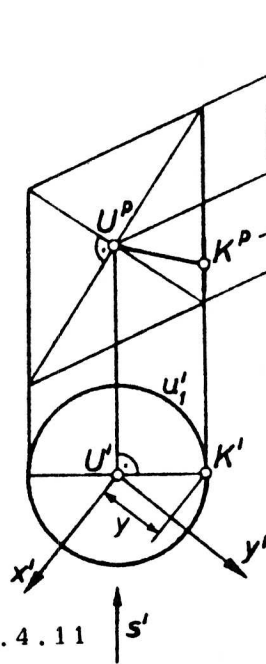


Fig. 4.11

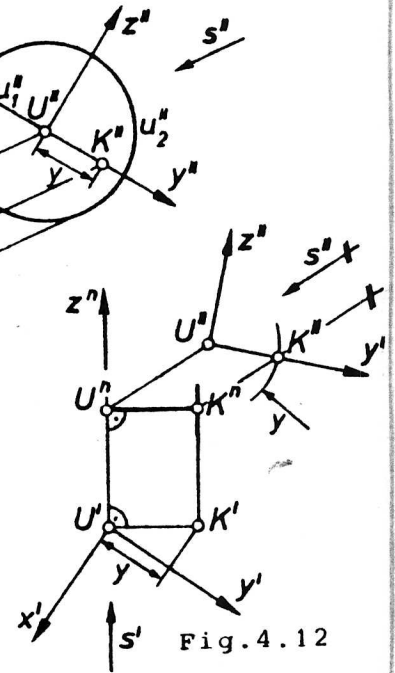


Fig. 4.12

Da ein Parallelriß genau dann ein Normalriß ist, wenn eine Kugelfläche einen kreisförmigen scheinbaren Umriß besitzt (nur ein Normalschnitt einer Drehzylinderfläche ist nämlich ein Kreis), liefert das Einschneideverfahren nach 7.3, Fn.1 genau dann eine normale Axonometrie, wenn $U^P K^P$ normal zu den zum Grundriß gehörenden Einschneidegeraden ist. Damit kann gemäß Fig.4.12 ein Einschneideaufriß zu gegebenen Einschneidegeraden und Einschneidegrundriß so ergänzt werden, daß ein normalaxonometrischer Riß entsteht. Wegen $U^n K^n \perp z^n$ ist UK eine Hauptgerade in π_1 ; aus $\overline{UK} = \overline{U'K'} = \overline{U^n K^n}$ folgt, daß dieser normalaxonometrische Riß kongruent zu einem Normalriß ist.

Gibt man Grund- und Aufriß eines Sehstrahls s für einen neuen Normalriß an, so ist die Lage des Einschneidegrundrisses im wesentlichen bestimmt; aus Fig.4.12 erkennt man sofort, wie unter Benützung von $\overline{U'K'} = \overline{U^n K^n}$ dann die zum Aufriß gehörenden Einschneidegeraden verlaufen. Damit kann man den in Fig.3.21 mit Hilfe von zwei Seitenrissen konstruierten Normalriß schneller durch Einschneiden erhalten.

5. Abbildungen aus einer Ebene in eine Ebene

Die in der Darstellenden Geometrie auftretenden Abbildungen gestatten es, verschiedenartige Probleme einheitlich zu lösen und ordnen den gesamten Stoff. Im Falle einer injektiven Abbildung unterscheidet man auch sprachlich streng zwischen der Abbildung und ihrer inversen Abbildung; Formulierungen, die auf eine symmetrische Kopplung hinweisen, sollen vermieden werden.

Die in 5 besprochenen Inhalte gehen zum Teil über den Schulstoff hinaus, müssen aber dem Lehrer vertraut sein. Die Abbildungen sind an jenen Stellen zu erläutern, wo dem Schüler das Bedürfnis nach begrifflicher Fassung eingeübter, immer wiederkehrender Konstruktionsideen verständlich ist.

5.1 Parallelperspektivität

Eine Abbildung $\beta: \epsilon \rightarrow \varphi$ aus einer Ebene ϵ in eine Ebene φ heißt eine *Parallelperspektivität*, wenn eine weder zu ϵ noch zu φ parallele Gerade e so existiert, daß die Punkte $P \in \epsilon$ und $\beta(P) \in \varphi$ stets auf einer zu e parallelen Geraden (*Perspektivitätsgeraden*) liegen. Ist F eine Figur in ϵ , so heißt $\beta(F) \subset \varphi$ *parallelperspektiv* zu F .

Jede Parallelperspektivität $\beta: \epsilon \rightarrow \varphi$ ist eine Bijektion (global, injektiv, surjektiv), und die inverse Abbildung $\beta^*: \varphi \rightarrow \epsilon$ ist auch eine Parallelperspektivität (Fig.5.1). Für $\epsilon = \varphi$ ist jede Parallelperspektivität die Identität in ϵ und für $\epsilon \parallel \varphi$ und $\epsilon \neq \varphi$ eine *Schiebung* parallel zu den Perspektivitätsgeraden.

Beispiele für Parallelperspektivitäten:

- (1) Ist ϵ eine nicht projizierende Ebene bezüglich einer Parallelprojektion $p: P \rightarrow \pi$, so ist die Einschränkung $p|_{\epsilon}: \epsilon \rightarrow \pi$ (vgl. 2.2, Bem. (a)) eine Parallelperspektivität mit den projizierenden Geraden als Perspektivitätsgeraden. Jede Parallelperspektivität $\beta: \epsilon \rightarrow \varphi$ läßt sich als Einschränkung $p|_{\epsilon}$ einer Parallelprojektion $p: P \rightarrow \varphi$ auffassen.
- (2) Sind ϵ und φ zwei Ebenen, die zu den Erzeugenden einer Prismenfläche oder Zylinderfläche Φ nicht parallel sind, so ist der ebene Schnitt $\varphi \cap \Phi$ parallelperspektiv zum ebenen Schnitt $\epsilon \cap \Phi$, wobei die Erzeugenden Perspektivitätsgeraden sind.

Bem.: (a) Eine *Prismenfläche* wird durch ein *Leitpolygon*, das nicht notwendig eben oder geschlossen sein muß, und eine Gerade e festgelegt; jede *Erzeugende* ist zu e parallel und schneidet das Leitpolygon. In analoger Weise wird eine *Zylinderfläche* mit Hilfe einer (nicht notwendig ebenen oder geschlossenen) *Leitkurve* erklärt.

Der Unterschied zu den aus dem Mathematik- und Physikunterricht bekannten, *Prisma* und *Zylinder* genannten Körpern ist zu betonen und zumindest anfangs auch sprachlich durch Verwendung der Bezeichnungen *Prismenfläche* und *Zylinderfläche* hervorzuheben.

(3) Wird eine Ebene ε , die keine Hauptgerade ist, um eine Hauptgerade $h \subset \varepsilon$ in die Hauptebene ε_0 parallel zur Bildebene π gedreht (vgl. 3.4, M2), so sind alle Drehsehnen parallel: Für Punkte in derselben Bahnkreisebene, also mit konzentrischen Bahnkreisbogen, und für Punkte in verschiedenen Bahnkreisebenen und mit gleich großen Bahnkreisradien ist das trivial und stimmt daher für je zwei Punkte von ε . Eine Figur F in ε ist daher zu ihrer parallelgedrehten Lage F_0 in ε_0 parallelperspektiv, wobei die Drehsehnen Perspektivitätsgeraden sind.

Eigenschaften einer Parallelperspektivität $\beta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ mit $\varepsilon \neq \varphi$ (vgl. Fig. 5.1):

1. Für $\varepsilon \neq \varphi$ sind die Fixpunkte genau die Punkte der Schnittgeraden $a = \varepsilon \cap \varphi$ (Perspektivitätsachse); für $\varepsilon \parallel \varphi$, $\varepsilon \neq \varphi$ gibt es keinen Fixpunkt.
2. Die Menge der den Punkten einer Geraden $g \subset \varepsilon$ zugeordneten Punkte ist eine Gerade $\beta(g) \subset \varphi$. (Folgt aus (1) und 2.2,5).
3. Ist eine Gerade $g \subset \varepsilon$ nicht parallel zu φ , so enthält g einen Fixpunkt (folgt aus 1 und 2). Ist g parallel zu φ , so ist $\beta(g)$ zu g parallel (folgt aus (1) und 2.3,7).
4. Jede Parallelperspektivität ist parallelentreu (folgt aus (1) und 2.3,8).
5. Jede Parallelperspektivität $\beta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ ist teilverhältnistreu, insbesondere mittelpunktstreu (folgt aus (1) und 2.3,9).

Bem.: (b) Eine Tangente einer ebenen Kurve ist die Grenzlage einer Sehne. Eine Parallelperspektivität $\beta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ ordnet der Tangente einer Kurve $k \subset \varepsilon$ im Punkt $P \in k$ die Tangente der Kurve $\beta(k) \subset \varphi$ im Punkt $\beta(P)$ zu.

Die Tangentialebene einer Zylinderfläche Φ in einem Punkt P der Erzeugenden e wird durch e und die Tangente eines ebenen Schnittes $\varepsilon \cap \Phi$ mit $e \subset \varepsilon$, $P \in \varepsilon$ aufgespannt. Ist \bar{P} ein weiterer Punkt von e und φ eine Ebene mit $e \subset \varphi$, $\bar{P} \in \varphi$, so folgt aus (2), 3 und (b): Eine Zylinderfläche besitzt in allen Punkten einer Erzeugenden dieselbe Tangentialebene¹ (vgl. Fig. 5.4).

¹Für $P = \bar{P}$ liefert diese Überlegung die Existenz der Tangentialebene: In P liegen die Tangenten von je zwei Schnitten mit Ebenen durch P , aber nicht durch e , in derselben Ebene durch e .

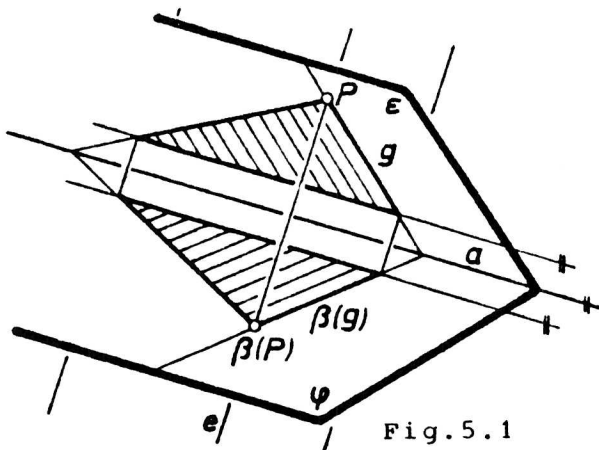


Fig. 5.1

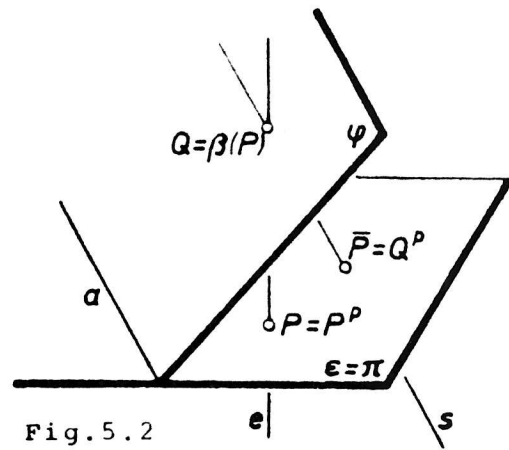


Fig. 5.2

5.2 Perspektive Affinität

Die Skizze in Fig. 5.1, welche eine Parallelperspektivität $\beta: \epsilon \rightarrow \psi$ veranschaulicht, ist in Wirklichkeit eine ebene Figur in der Zeichenebene π und erklärt (abgesehen von der Bezeichnung) eine Abbildung $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ mit folgenden Eigenschaften:

- A1: $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ ist eine Bijektion. Ist α nicht die Identität, so ist die Menge aller Fixpunkte entweder leer oder eine Gerade.
- A2: Es gibt eine Gerade $f \subset \pi$ derart, daß die Punkte $P \in \pi$ und $\alpha(P) \in \pi$ stets auf einer zu f parallelen Geraden liegen.
- A3: Die Menge $\alpha(g) \subset \pi$ der den Punkten einer Geraden $g \subset \pi$ zugeordneten Punkte ist stets eine Gerade.

Eine Abbildung einer Ebene auf sich, die A1, A2, A3 erfüllt, heißt eine *perspektive Affinität*; existiert eine Gerade a aus Fixpunkten, so heißt sie *Affinitätsachse*.

Jede der in A2 genannten Geraden bleibt als Ganzes fest, sie sind *Fixgeraden* von α . Aus A1 und A3 folgt: Existiert eine Affinitätsachse a , so enthalten die Geraden g und $\alpha(g)$ für $g \neq a$ denselben Punkt der Affinitätsachse a oder sind beide zur Affinitätsachse parallel. Existiert kein Fixpunkt, so muß g stets zu $\alpha(g)$ parallel sein und es liegt eine *Schiebung* in π vor; eine Schiebung in π ist festgelegt, wenn man zu einem Punkt P den ihm zugeordneten Punkt $\bar{P} \neq P$ kennt. Für $P = \bar{P}$ erhält man die Identität, die i. f. nicht weiter betrachtet wird.

Bem.: (a) Kennt man die Affinitätsachse a und zu einem Punkt $P \notin a$ den ihm zugeordneten Punkt $\bar{P} \notin a$, so kann man mit Hilfe von A1, A2, A3 zu jedem Punkt eindeutig den ihm zugeordneten Punkt

finden (vgl. Fig. 5.3). Zur Angabe $(a; P \rightarrow \bar{P})$ mit $P, \bar{P} \notin a$ gibt es daher nicht mehr als eine perspektive Affinität.

Ob zur Angabe $(a; P \rightarrow \bar{P})$ überhaupt eine perspektive Affinität existiert, ist zunächst offen, da wir zwar zu jedem Punkt den ihm zugeordneten Punkt finden können, aber nicht wissen, ob dann A3 gilt.

Da sich Fig. 5.1 als Parallelriß einer räumlichen Situation deuten läßt, gilt:

Geht eine ebene Figur $F \subset \varepsilon$ bei einer Parallelperspektivität $\beta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ in eine ebene Figur $\bar{F} \subset \varphi$ über und ist weder ε noch φ projizierend bezüglich einer Parallelprojektion $p: P \rightarrow \pi$, deren projizierende Geraden keine Perspektivitätsgeraden sind, so ist \bar{F}^P perspektiv affin zu F^P mit dem Riß von $\varepsilon \cap \varphi$ als Affinitätsachse und den Rissen der Perspektivitätsgeraden als Fixgeraden. Bei einer Parallelprojektion $p: P \rightarrow \pi$ "entsteht" somit aus einer Parallelperspektivität $\beta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ eine perspektive Affinität $\alpha: \pi \rightarrow \pi$.

Bem.: (b) Bezeichnet man die Zusammensetzung zweier Abbildungen¹ σ, τ mit $\tau \circ \sigma$ für $\tau \circ \sigma(X) := \tau(\sigma(X))$, so lautet die letzte Aussage $p \circ \beta = \alpha \circ p: \varepsilon \rightarrow \pi$.

Umgekehrt gilt:

Ist $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ eine perspektive Affinität, so existiert stets eine Parallelperspektivität $\beta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ und eine Parallelprojektion $p: P \rightarrow \pi$ so, daß $p \circ \beta = \alpha \circ p$ gilt (Fig. 5.2).

Beweis. Ist $P \in \pi$ ein Punkt, der nicht auf der Affinitätsachse a von α liegt, so ist $\alpha(P) =: \bar{P} \neq P$. Wir legen durch \bar{P} eine Gerade s , die nicht in π verläuft, und durch a eine Ebene $\varphi \neq \pi$ mit $\varphi \neq s$. Die Gerade $e = PQ$ mit $\{Q\} := \varphi \cap s$ bestimmt eine Parallelperspektivität $\beta: \varepsilon := \pi \rightarrow \varphi$ mit $P \rightarrow Q$, und die Gerade s legt eine Projektion $p: P \rightarrow \pi$ parallel zu s mit $Q \rightarrow \bar{P}$ fest. Dann gilt $(\varepsilon \cap \varphi)^P = a$ und $P = P^P$, $\bar{P} = Q^P = (\beta(P))^P$. Damit hat jene perspektive Affinität $\tilde{\alpha}: \pi \rightarrow \pi$, welche bei der Parallelprojektion $p: P \rightarrow \pi$ aus der Parallelperspektivität $\beta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ entsteht, dieselbe Affinitätsachse wie α und leistet auch $P \rightarrow \bar{P}$. Nach (a) ist notwendig $\alpha = \tilde{\alpha}$. □

Damit ist die offene Frage beantwortet: Es gibt eine - und dann genau eine - perspektive Affinität zur Angabe $(a; P \rightarrow \bar{P})$ mit $P, \bar{P} \notin a$.

¹ Leider wird in einem mathematischen Schulbuch diese Zusammensetzung mit $\sigma \circ \tau$ bezeichnet. Schreibt man allerdings $X \mapsto X\sigma$ anstelle von $X \mapsto \sigma(X)$, was in der geometrischen Literatur oft geschieht, so ist für die Zusammensetzung die Schreibweise $\sigma\tau$ mit $X\sigma\tau := (X\sigma)\tau$ zweckmäßig.

Die Existenz perspektiver Affinitäten ist nur in DESARGUES-Ebenen gesichert, also in solchen (affinen) Ebenen, die in einen dreidimensionalen (affinen) Raum eingebettet werden können; der obige Existenznachweis benützt diese Eigenschaft der Anschauungsebene.

Bem.: (c) Eine perspektive Affinität ist parallelentreu und teilverhältnistreu, insbesondere mittelpunktneu (folgt aus ihrer Erzeugbarkeit durch eine Parallelperspektivität und 5.1,4 und 5).

(d) Sind zwei Strecken einer Geraden gleich lang, so sind auch die ihnen in einer perspektiven Affinität zugeordneten Strecken gleich lang. (Diese nur in 8.1 benötigte Tatsache folgt aus dem Strahlensatz).

Beispiele für perspektive Affinitäten:

(1) Ein Parallelogramm $\{P, Q, R, S\}$ wird der perspektiven Affinität $(a; P \rightarrow \bar{P})$ unterworfen. Nach Wahl einer Sichtbarkeit kann Fig. 5.3 als Parallelriß einer durch zwei ebene Schnitte berandeten Prismenfläche (*Prismenflächenstumpf*) gedeutet werden.

(2) Eine ebene Kurve k wird einer perspektiven Affinität $(a; P \rightarrow \bar{P})$ unterworfen. Nach Wahl einer Sichtbarkeit kann Fig. 5.4 als Parallelriß einer durch zwei ebene Schnitte berandeten Zylinderfläche (*Zylinderflächenstumpf*) gedeutet werden.

Bem.: (e) Bei einer perspektiven Affinität geht eine Tangente einer Kurve k in eine Tangente der zugeordneten Kurve \bar{k} über.

Fig. 5.3

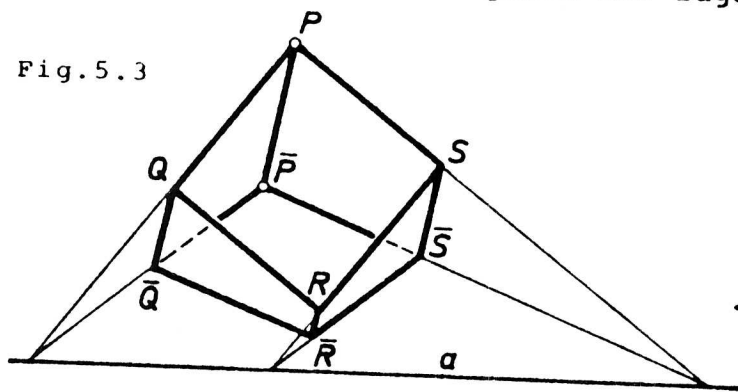
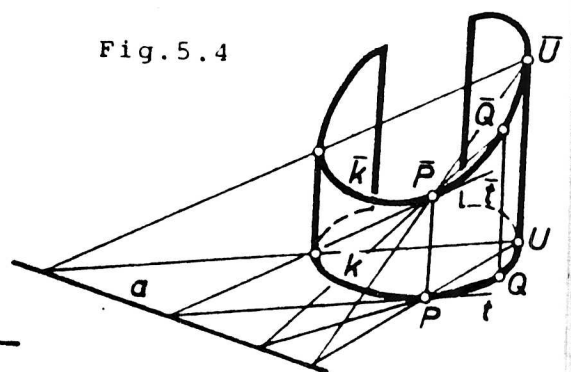


Fig. 5.4



Folgende Sonderfälle perspektiver Affinitäten sollen abgesehen von den Schiebungen diskutiert werden:

1. *Orthogonale perspektive Affinität*: Die Fixgeraden sind zur Affinitätsachse orthogonal. Beispiel: Normalriß F^n einer ebenen Figur $F \subset \epsilon \times \Pi$ und Normalriß F_o^n der parallelgedrehten Figur $F_o \subset \epsilon_o \parallel \Pi$ (vgl. 3.4).

2. *Symmetrie an einer Achse a parallel zu einer Geraden f*: Die Fixgeraden sind zu f parallel, der Mittelpunkt jeder Strecke aus Ursprung und Bildpunkt liegt auf a (überprüfen von A1, A2 und A3!). Beispiele vgl. 8.1, 8.2.

3. *Orthogonale Symmetrie an einer Achse a (axiale Spiegelung)*.

Gelegentlich werden auch die Parallelperspektivitäten $\beta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ als perspektive Affinitäten $\varepsilon \rightarrow \varphi$ bezeichnet. Abgesehen davon, daß es auch im Raum perspektive Affinitäten gibt, die aber den ganzen Raum auf sich abbilden, existieren folgende grundlegende Unterschiede: Die Perspektivitätsgeraden gehören der Definitionsmenge einer Parallelperspektivität nicht an, während die in A2 genannten Geraden Fixgeraden einer perspektiven Affinität sind; eine Parallelperspektivität wird allein durch Verbinden und Schneiden vervollständigt, während zur Vervollständigung einer perspektiven Affinität unbedingt A3 nötig ist.

Eine Parallelperspektivität im Raum ist nach 5.1 daran zu erkennen, daß parallele Perspektivitätsgeraden auftreten; für die konstruktive Behandlung in einem Parallelriß benötigt man dann aber A1, A2 und A3, was durch verschiedene Bezeichnungen unterstrichen wird.

Der Schüler sollte daran gewöhnt werden, nur die Angaben einer perspektiven Affinität durch räumliche Überlegungen zu gewinnen, dann aber die Gesetze A1, A2 und A3 zu benutzen.

5.3 Fernpunkte und Ferngeraden

In Fig. 1.1 wird eine zu a parallele Gerade \tilde{a} durch Verdrehen einer a schneidenden Geraden b erzeugt, in Fig. 1.3 führt ein analoger Vorgang auf eine zu ε parallele Ebene $\tilde{\varepsilon}$. Das legt nahe:

Sprechweise 1: Parallele verschiedene Geraden haben genau einen Fernpunkt gemeinsam.

Bem.: (a) Aus 1.1, Bem.(b) folgt: Jede Gerade besitzt genau einen Fernpunkt.

Sprechweise 2: Parallele verschiedene Ebenen haben genau eine Ferngerade gemeinsam. Die Ferngerade einer Ebene ist die Menge der Fernpunkte ihrer Geraden.

Bem.: (b) Aus 1.1, Bem.(d) folgt: Eine Ebene und eine zu ihr parallele Gerade, die nicht in dieser Ebene liegt, haben genau einen Fernpunkt gemeinsam, der auf der Ferngeraden der Ebene liegt.

Der Beschriftung eines Fernpunkts bzw. einer Ferngeraden wird der Index u hinzugefügt, z.B. G_u bzw. e_u . In einer Zeichnung deuten wir einen Fernpunkt durch einen hohlen Pfeil an (Fig. 5.5), wobei es gleichgültig ist, nach welcher Seite der Pfeil zielt. Eine Unterscheidung zu einem ausgefüllten Orientierungspfeil (vgl. 2.2) ist zweckmäßig, um zu unterstreichen, daß eine Gerade nur einen

Fernpunkt hat und nicht etwa jede Halbgerade einen anderen Fernpunkt besitzt.

Es ist darauf hinzuweisen, daß diese Sprechweisen neue geometrische Gebilde schaffen und nichts über das Unendliche aussagen; sie sind anschaulich motivierte Festsetzungen, die in der Mathematik gelegentlich durch andere Festsetzungen ersetzt werden (z.B. konformer Abschluß der Ebene). Die Sprechweisen 1 und 2 dienen dazu, die Sonderrolle paralleler Lage sprachlich zu eliminieren. Erweitert man jede Gerade durch ihren Fernpunkt, so gilt: Zwei Geraden sind genau dann windschief, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben; zwei verschiedene Geraden einer Ebene haben stets einen Schnittpunkt.

Man achte darauf, daß über Fernpunkte und Ferngeraden keine Schlüsse gezogen werden, die nicht aus den Sprechweisen 1 und 2 folgen. So ist zunächst nicht erklärt, was ein Fernpunkt einer Kurve, etwa einer Hyperbel ist.

Fügt man einer Geraden $g \in P$ bzw. einer Ebene $\varepsilon \in P$ ihren Fernpunkt G_u bzw. die Fernpunkte ihrer Geraden, also ihre Ferngerade e_u hinzu, so heißt $g \cup \{G_u\}$ bzw. $\varepsilon \cup e_u$ eine *projektive Gerade* bzw. eine *projektive Ebene*. Die Punktmenge P vermehrt um die Fernpunkte aller Geraden aus P heißt *projektiver Raum* \dot{P} , die Punkte von P heißen dann *eigentliche Punkte*.

Der Begriff *Fernebene* wird nicht benötigt. Man vermeide es, als Sprechweise 3 einzuführen: Alle Fernpunkte von P liegen in einer Ebene. Dies ist keine zusätzliche Festsetzung, sondern eine Folge der Sprechweisen 1 und 2. Außerdem verleitet der Name "Fernebene" dazu, ohne weiteren Beweis der Menge der Fernpunkte Eigenschaften einer Ebene zuzuschreiben.

Beim Studium von Zentralprojektionen (vgl.6), Perspektivitäten (vgl.5.4) und perspektiven Kollineationen (vgl.5.5) ist es zweckmäßig, stets im projektiven Raum \dot{P} und mit projektiven Geraden und projektiven Ebenen zu arbeiten. Wir verwenden dann die ursprünglichen Bezeichnungen g anstelle von $g \cup \{G_u\}$ und ε anstelle von $\varepsilon \cup e_u$. Ist G_u der Fernpunkt der Geraden g , so ist OG_u die zu g parallele Gerade durch $O \in P$; ist e_u die Ferngerade der Ebene ε , so ist Oe_u die zu ε parallele Ebene durch $O \in P$.

Die in 2.1 angegebene Definition einer Zentralprojektion ist auch für eine Zentralprojektion $c: \dot{P} \rightarrow \pi$ im projektiven Raum sinnvoll. Der Zentralriß G_u^c eines Fernpunkts G_u mit $\{G_u^c\} = OG_u \cap \pi$ heißt ein *Fluchtpunkt*; er ist der Spurpunkt jener projizierenden Geraden \tilde{g} , welche zu einer Geraden g mit dem Fernpunkt G_u parallel ist (Fig.5.5). Der Zentralriß e_u^c einer Ferngeraden e_u mit $e_u^c = Oe_u \cap \pi$ heißt eine *Fluchtgerade*; sie ist die Spur jener projizierenden Ebene $\tilde{\varepsilon}$, welche zu einer Ebene ε mit der Ferngeraden e_u parallel ist (Fig.5.5).

Ein Punkt $V \neq O$ hat genau dann einen Fernpunkt von π als Zentralriß V^c , wenn die projizierende Gerade OV zu π parallel ist (Fig.5.5). Ein solcher Punkt heißt *Verschwindungspunkt* und alle Ver-

schwindungspunkte liegen in der zur Bildebene parallelen *Ver-*
schwindungsebene durch den Augpunkt O . Bei der Zentralprojektion
 $\sigma: \mathbb{P}^3 \rightarrow \pi$ hat nur der Augpunkt O keinen Bildpunkt (vgl. dagegen 2.1,1).

Auf Grund der Sprechweisen 1 und 2 gilt:

1. Die Zentralrisse paralleler Geraden haben denselben Fluchtpunkt. Dieser ist genau dann ein Fernpunkt der Bildebene, wenn die Geraden Hauptgeraden sind.
2. Parallele Ebenen besitzen dieselbe Fluchtgerade. Diese ist genau dann die Ferngerade der Bildebene, wenn die Ebenen Hauptebenen sind.
3. Ist eine Gerade parallel zu einer Ebene, so liegt ihr Fluchtpunkt auf der Fluchtgeraden der Ebene (Fig.5.5).

Fig.5.5

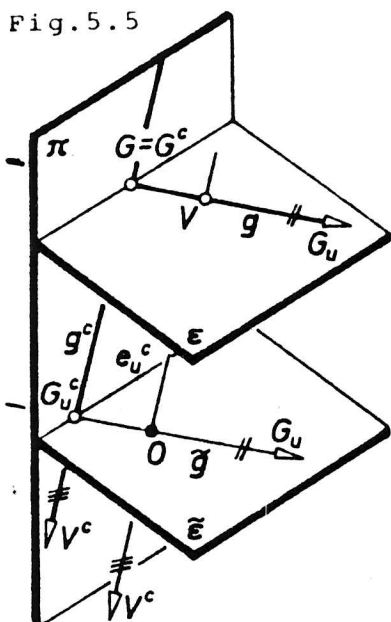


Fig.5.6

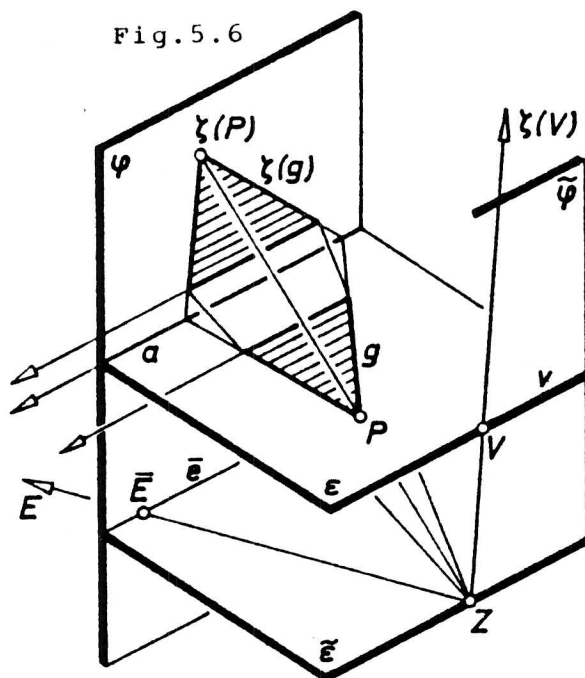
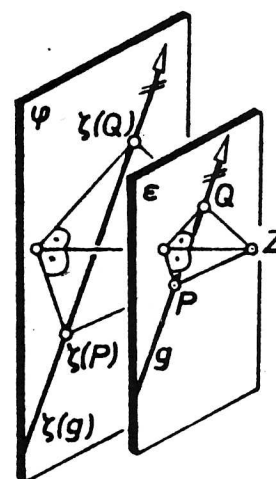


Fig.5.7



Bem.: (c) Die Aussage 2.1,5 gilt nun für jede nicht projizierende Gerade g , also auch, wenn g eine Ferngerade oder wenn die projizierende Ebene σ durch g zu π parallel ist. Weiter ist im Gegensatz zu 2.1 jetzt $g^c = \{X \in \pi \mid X = P^c \wedge P \in g\} = \sigma \cap \pi$.

Um eine gemäß 2.2 definierte Parallelprojektion auf den projektiven Raum erweitern zu können, fassen wir sie als Projektion mit dem gemeinsamen Fernpunkt O_u der parallelen projizierenden Geraden als Augpunkt auf. Wegen der Parallelentreue wird dabei ein von O_u verschiedener Fernpunkt stets auf einen Fernpunkt von π abgebildet, sodaß der Fluchtpunkt jeder nicht projizierenden Geraden dann ein Fernpunkt von π und daher die Fluchtgerade jeder nicht projizierenden Ebene die Ferngerade von π ist.

5.4 Perspektivität

Eine Abbildung $\zeta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ aus einer Ebene ε in eine Ebene φ heißt eine *Perspektivität*, wenn ein weder in ε noch in φ liegender Punkt Z (*Perspektivitätszentrum*) so existiert, daß die Punkte $P \in \varepsilon$ und $\zeta(P) \in \varphi$ stets auf einer Geraden durch Z liegen. Ist F eine Figur in ε , so heißt $\zeta(F) \subset \varphi$ *perspektiv* zu F .

Für $\varepsilon = \varphi$ ist jede Perspektivität die Identität in ε und für $\varepsilon \parallel \varphi$ und $\varepsilon \neq \varphi$ eine *zentrische Ähnlichkeit* (Fig.5.7). Für $\varepsilon \not\parallel \varphi$ ist eine Perspektivität $\zeta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ nur dann global und surjektiv, falls man im projektiven Raum arbeitet.¹ Jedem Verschwindungspunkt $V \in \varepsilon$, für den ZV parallel φ ist, wird ein Fernpunkt $\zeta(V) \in \varphi$ zugeordnet; alle Verschwindungspunkte liegen auf der Verschwindungsgeraden $v = \tilde{\varphi} \cap \varepsilon \subset \varepsilon$, wobei $\tilde{\varphi}$ die zu φ parallele Ebene durch Z ist (Fig.5.6). Jeder Fluchtpunkt $\bar{E} \in \varphi$, für den $Z\bar{E}$ parallel ε ist, ist einem Fernpunkt E von ε zugeordnet; alle Fluchtpunkte liegen auf der Fluchtgeraden $\bar{e} = \tilde{\varepsilon} \cap \varphi \subset \varphi$, wobei $\tilde{\varepsilon}$ die zu ε parallele Ebene durch Z ist (Fig.5.6).

Da eine Perspektivität $\zeta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ im projektiven Raum auch injektiv ist, liegt eine Bijektion vor, und die inverse Abbildung $\zeta^*: \varphi \rightarrow \varepsilon$ ist auch eine Perspektivität (vgl. Fig.5.6).

Beispiele für Perspektivitäten:

- (1) Ist ε eine nicht projizierende Ebene bezüglich einer Zentralprojektion $\alpha: \dot{P} \rightarrow \pi$, so ist die Einschränkung $\alpha|_{\varepsilon}: \varepsilon \rightarrow \pi$ eine Perspektivität mit dem Augpunkt als Perspektivitätszentrum. Die Verschwindungsgerade von ζ ist der Schnitt von ε mit der Verschwindungsebene von α , die Fluchtgerade \bar{e} in φ fällt in die Fluchtgerade e_u^c von ε (Fig.5.5). Jede Perspektivität $\zeta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ läßt sich als Einschränkung $\alpha|_{\varepsilon}$ einer Zentralprojektion $\alpha: \dot{P} \rightarrow \varphi$ auffassen.
- (2) Sind ε und φ zwei Ebenen, welche die Spitze S einer Pyramidenfläche oder Kegelfläche Φ nicht enthalten, so ist der ebene Schnitt $\varphi \cap \Phi$ perspektiv zum ebenen Schnitt $\varepsilon \cap \Phi$, wobei die Spitze das Perspektivitätszentrum ist.

Bem.: (a) Eine *Pyramidenfläche* wird durch ein (nicht notwendig ebenes oder geschlossenes) *Leitpolygon* und die *Spitze S* festgelegt; jede *Erzeugende* geht durch S und schneidet das Leitpolygon. In analoger Weise wird eine *Kegelfläche* erklärt.

Die Bezeichnungen "Doppelpyramide" und "Doppelkegel" sollten vermieden werden und der Unterschied zu den *Pyramide* und *Kegel* genannten Körpern betont werden.

¹ Wir setzen zunächst Z als eigentlichen Punkt voraus.

Eigenschaften einer Perspektivität $\varepsilon \rightarrow \varphi$ mit $\varepsilon \neq \varphi$ (vgl. 5.6):

1. Die Fixpunkte sind genau die Punkte der Schnittgeraden $a = \varepsilon \cap \varphi$ (*Perspektivitätsachse*); bei einer zentrischen Ähnlichkeit ($\varepsilon \parallel \varphi, \varepsilon \neq \varphi$) ist a die gemeinsame Ferngerade der beiden Ebenen.
2. Die Menge der den Punkten einer Geraden $g \subset \varepsilon$ zugeordneten Punkte ist eine Gerade $\zeta(g) \subset \varphi$. (Folgt aus (1) und 5.3, Bem.(c)).
3. Eine Gerade $g \subset \varepsilon$ mit $g \neq a$ enthält einen Fixpunkt auf der Perspektivitätsachse a , und die Gerade $\zeta(g)$ geht durch diesen Fixpunkt (folgt aus 1 und 2).
4. Parallelen Geraden werden bei einer Perspektivität $\zeta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ nur dann parallele Geraden zugeordnet, wenn sie zu φ parallel sind (folgt aus (1) und 5.3,1).
5. Eine Perspektivität $\zeta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ ist für eine Gerade $g \subset \varepsilon$ nur dann teilverhältnistreu, insbesondere mittelpunkttreu, wenn g parallel zu φ ist (folgt aus dem Strahlensatz). Bei einer zentrischen Ähnlichkeit $\zeta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ mit $\varepsilon \parallel \varphi$ wird die Länge jeder Strecke mit demselben Faktor $\bar{z}_\varphi; \bar{z}_\varepsilon$ verzerrt. (Beachte ähnliche Dreiecke in Fig.5.7).

Bem.: (b) Eine Perspektivität $\zeta: \varepsilon \rightarrow \varphi$ ordnet der Tangente einer Kurve $k \subset \varepsilon$ im Punkt $P \in k$ die Tangente der Kurve $\zeta(k) \subset \varphi$ im Punkt $\zeta(P)$ zu.

(c) Einem Verschwindungspunkt V der Kurve $k \subset \varepsilon$, also einem Punkt von k auf der Verschwindungsgeraden $v \subset \varepsilon$, wird der Fernpunkt $\zeta(V) \in \varphi$ der Kurve $\zeta(k) \subset \varphi$ zugeordnet und der Tangente t von k in V als Grenzlage von Sehnen durch V die Grenzlage $\zeta(t)$ paralleler Sehnen der Kurve $\zeta(k) \subset \varphi$ durch $\zeta(V)$; die Gerade $\zeta(t)$ heißt die *Tangente von $\zeta(k)$ im Fernpunkt $\zeta(V)$* .

Mit Hilfe einer zu 5.1 analogen Überlegung folgt aus (2), 3 und (b): Eine Kegelfläche besitzt in allen von der Spitze verschiedenen Punkten einer Erzeugenden dieselbe Tangentialebene (vgl. Fig.5.10), und diese ist nach (c) auch die Tangentialebene im Fernpunkt der Erzeugenden².

Um eine gemäß 5.1 definierte Parallelperspektivität auf den projektiven Raum \dot{P} erweitern zu können, fassen wir sie als Perspektivität mit dem gemeinsamen Fernpunkt Z_u der parallelen Perspektivitätsgeraden als Perspektivitätszentrum auf. In diesem Sinne ist eine Parallelperspektivität eine spezielle Perspektivität.

² Die Existenz einer Tangentialebene im Fernpunkt der Erzeugenden folgt analog zu 5.1, Fn.1.

5.5 Perspektive Kollineation

Die Skizze in Fig.5.6, welche eine Perspektivität $\zeta: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ veranschaulicht, ist in Wirklichkeit eine ebene Figur in der projektiv abgeschlossenen Zeichenebene π und erklärt eine Abbildung $\kappa: \pi \rightarrow \pi$ mit folgenden Eigenschaften:

- K1: $\kappa: \pi \rightarrow \pi$ ist eine Bijektion. Ist κ nicht die Identität, so ist die Menge aller Fixpunkte eine Gerade a .
- K2: Es gibt einen Punkt $Z \in \pi$ derart, daß die Punkte $P \in \pi$ und $\kappa(P) \in \pi$ stets auf einer Geraden durch Z liegen.
- K3: Die Menge $\kappa(g) \subset \pi$ der den Punkten einer Geraden $g \subset \pi$ zugeordneten Punkte ist stets eine Gerade.

Eine Abbildung einer projektiven Ebene auf sich, die K1, K2, K3 erfüllt, heißt eine *perspektive Kollineation* mit dem *Kollineationszentrum* Z ; nach K2 ist bei der Identität, die wir i. f. nicht weiter betrachten, jeder Punkt von π als Kollineationszentrum anzusprechen. Die Gerade a aus Fixpunkten heißt *Kollineationsachse*.

Jede der in K2 genannten Geraden bleibt als Ganzes fest, sie sind *Fixgeraden* von κ . Damit ist das Kollineationszentrum Z , welches auch auf a liegen kann, ein Fixpunkt von κ . Aus K1 und K3 folgt:

Die Geraden g und $\kappa(g)$ enthalten für $g \neq a$ denselben Punkt der Kollineationsachse a ; dieser kann der Fernpunkt von a sein (Fig.5.6).

Bem.: (a) Kennt man das Kollineationszentrum Z , die Kollineationsachse a und zu einem Punkt $P \notin a \cup \{Z\}$ den ihm zugeordneten Punkt $\bar{P} \notin a \cup \{Z\}$ mit $\bar{P} \in PZ$, so kann man mit Hilfe von K1, K2, K3 zu jedem Punkt eindeutig den ihm zugeordneten Punkt finden (vgl. Fig.5.9). Zur Angabe $(Z, a; P \rightarrow \bar{P})$ mit $P, \bar{P} \notin a \cup \{Z\}$ und $\bar{P} \in PZ$ gibt es daher nicht mehr als eine perspektive Kollineation. Die Existenz ist zunächst offen (vgl. 5.2).

Nach der in 5.2 angegebenen Definition einer perspektiven Affinität $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ kann diese als eine perspektive Kollineation der projektiven Ebene π aufgefaßt werden, bei der als Kollineationszentrum der gemeinsame Fernpunkt Z_u der parallelen Fixgeraden von α benutzt wird. In diesem Sinne ist eine perspektive Affinität eine spezielle perspektive Kollineation, die wegen der Parallelentreue einer perspektiven Affinität jedem Fernpunkt von π einen Fernpunkt von π zugeordnet.

Da sich jener Inhalt der Fig.5.6, der die Zuordnung $P \rightarrow \zeta(P)$ zeigt, als Zentralriß oder Parallelriß einer räumlichen Situation deuten läßt, gilt:

Geht eine ebene Figur $F \subset \epsilon$ bei einer Perspektivität $\zeta: \epsilon \rightarrow \varphi$ mit dem Perspektivitätszentrum Z in eine ebene Figur $\bar{F} \subset \varphi$ über, und ist weder ϵ noch φ projizierend bezüglich einer Zentralprojektion $c: \dot{P} \rightarrow \pi$, deren Augpunkt verschieden von Z ist, bzw. bezüglich einer Parallelprojektion $p: \dot{P} \rightarrow \pi$, so ist \bar{F}^c bzw. \bar{F}^p perspektiv kollinear zu F^c bzw. F^p mit dem Riß von $\epsilon \cap \varphi$ als Kollineationsachse und dem Riß von Z als Kollineationszentrum; ist bei einer Zentralprojektion speziell Z^c ein Fernpunkt von π , so liegt eine perspektive Affinität in π vor. Bei einer Parallelprojektion $p: \dot{P} \rightarrow \pi$ "entsteht" somit aus einer Perspektivität $\zeta: \epsilon \rightarrow \varphi$ eine perspektive Kollineation $\kappa: \pi \rightarrow \pi$, bei einer Zentralprojektion $c: \dot{P} \rightarrow \pi$ eine perspektive Kollineation $\kappa: \pi \rightarrow \pi$ bzw. eine perspektive Affinität $\alpha: \pi \rightarrow \pi$, je nachdem Z kein Verschwindungspunkt bzw. ein Verschwindungspunkt von c ist.

Bem.: (b) Die letzten Aussagen lauten $p \circ \zeta = \kappa \circ p: \epsilon \rightarrow \pi$ und $c \circ \zeta = \kappa \circ c: \epsilon \rightarrow \pi$ bzw. $c \circ \zeta = \alpha \circ c: \epsilon \rightarrow \pi$.

Umgekehrt gilt:

Ist $\kappa: \pi \rightarrow \pi$ eine perspektive Kollineation, so existiert stets eine Perspektivität $\zeta: \epsilon \rightarrow \varphi$ und eine Parallelprojektion $p: \dot{P} \rightarrow \pi$ so, daß $p \circ \zeta = \kappa \circ p$ gilt (Fig.5.8).

Beweis. Ist $P \in \pi$ ein vom Kollineationszentrum Z verschiedener Punkt, der nicht auf der Kollineationsachse a von κ liegt, so ist $\kappa(P) =: \bar{P} \neq P$. Wir legen durch \bar{P} eine Gerade s , die nicht in π verläuft, und durch a eine Ebene $\varphi \neq \pi$ mit $\varphi \neq s$. Der eigentliche Punkt $\{Z_1\} =: \tilde{s} \cap PQ$ mit $\{Q\} =: \varphi \cap s$ und $s \parallel \tilde{s}$, $Z \in \tilde{s}$ bestimmt als Perspektivitätszentrum eine Perspektivität $\zeta: \epsilon =: \pi \rightarrow \varphi$ mit $P \rightarrow Q$, und die Gerade s eine Projektion $p: \dot{P} \rightarrow \pi$ parallel zu s mit $Q \rightarrow \bar{P}$. Dann gilt $(\epsilon \cap \varphi)^P = a$, $Z_1^P = Z$ und $P = P^P$, $\bar{P} = Q^P = (\zeta(P))^P$. Damit hat jene perspektive Kollineation $\tilde{\kappa}: \pi \rightarrow \pi$, welche bei der Parallelprojektion $p: \dot{P} \rightarrow \pi$ aus der Perspektivität $\zeta: \epsilon \rightarrow \varphi$ entsteht, dasselbe Kollineationszentrum Z und dieselbe Kollineationsachse a wie κ und leistet auch $P \rightarrow \bar{P}$. Nach (a) ist notwendig $\kappa = \tilde{\kappa}$.

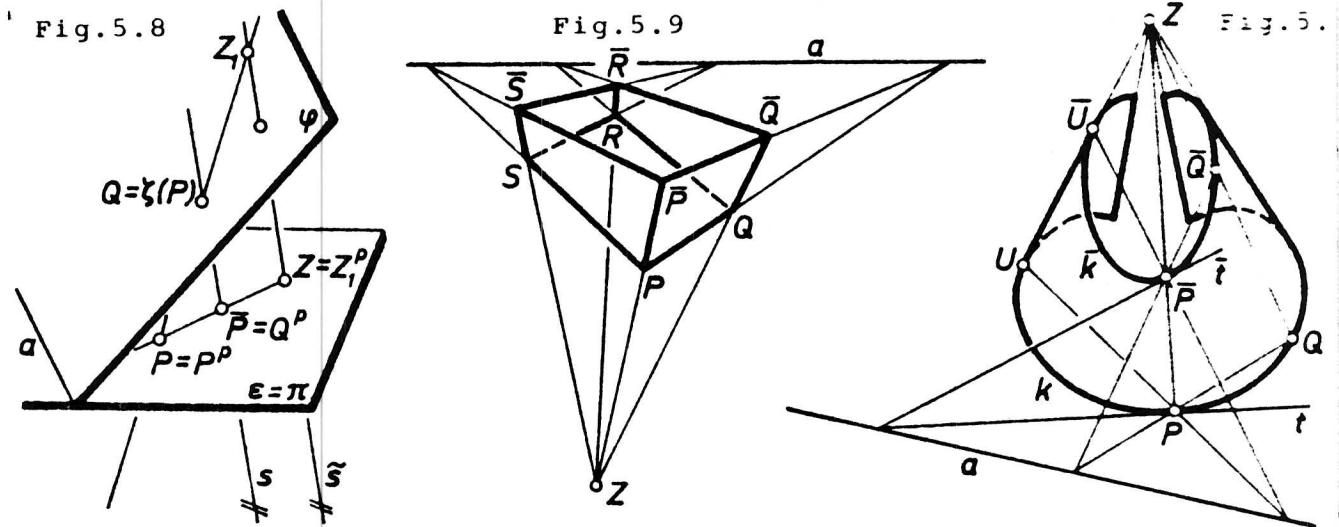
□

Damit ist die offene Frage beantwortet: Es gilt eine - und dann genau eine - perspektive Kollineation zur Angabe $(Z, a; P \rightarrow \bar{P})$ mit $P, \bar{P} \notin a \cup \{Z\}$, $\bar{P} \in PZ$. Die Existenz perspektiver Kollineationen ist nur in projektiven DESARGUES-Ebenen gesichert.

Bem.: (c) Eine perspektive Kollineation $\kappa: \pi \rightarrow \pi$ ordnet parallelen Geraden nur dann parallele Geraden zu, wenn ihr Fernpunkt auf der Kollineationsachse liegt; nur für eine zur Kollineationsachse parallele Gerade ist eine perspektive Kollineation teilverhältnistreu, also insbesondere mittelpunktstreu (folgt aus der Erzeugbarkeit durch eine Perspektivität und 5.4,4 bzw.5).

Beispiele für perspektive Kollineationen:

- (1) Ein Parallelogramm $\{P, Q, R, S\}$ wird der perspektiven Kollineation $(Z, a; P \rightarrow \bar{P})$ unterworfen. Nach Wahl einer Sichtbarkeit kann Fig.5.9 als Parallelriß oder Zentralriß einer durch zwei ebene Schnitte berandete Pyramidenfläche (Pyramidenflächenstumpf) gedeutet werden, wobei die Spitze kein Verschwindungspunkt der Zentralprojektion ist.
- (2) Fig.5.3 kann als Zentralriß eines Pyramidenflächenstumpfes gedeutet werden, wobei die Pyramidenspitze ein Verschwindungspunkt ist.
- (3) Eine ebene Kurve k wird einer perspektiven Kollineation $(Z, a; P \rightarrow \bar{P})$ unterworfen. Nach Wahl einer Sichtbarkeit kann Fig.5.10 als Parallelriß oder Zentralriß einer durch zwei ebene Schnitte berandeten Kegelfläche (Kegelflächenstumpf) gedeutet werden, wobei die Spitze kein Verschwindungspunkt der Zentralprojektion ist.



Bem.: (d) Bei einer perspektiven Kollineation geht eine Tangente einer Kurve in eine Tangente der zugeordneten Kurve über.

- (4) Fig.5.4 kann als Zentralriß eines Kegelflächenstumpfes gedeutet werden, wobei die Kegelspitze ein Verschwindungspunkt ist.

Da nach 5.4 eine Parallelperspektivität $\beta: \epsilon \rightarrow \phi$ als eine Perspektivität $\zeta: \epsilon \rightarrow \phi$ im projektiven Raum aufgefaßt werden kann, deren Perspektivitätszentrum ein Fernpunkt $Z_u \in \dot{P}$ ist, gilt:

Geht eine ebene Figur $F \subset \epsilon$ bei einer Parallelperspektivität $\beta: \epsilon \rightarrow \phi$ in eine ebene Figur $\bar{F} \subset \phi$ über und ist weder ϵ noch ϕ projizierend bezüglich einer Zentralprojektion $\alpha: \dot{P} \rightarrow \pi$, so ist \bar{F}^C perspektiv kollinear zu F^C mit dem RiB von $\epsilon \cap \phi$ als Kollineationsachse und dem Fluchtpunkt Z_u^C der parallelen Perspektivitätsgeraden als Kollineationszentrum; sind speziell die Perspektivitätsgeraden parallel zur Bildebene, ist also Z_u ein Fernpunkt von π , so ist \bar{F}^C perspektiv affin zu F^C .

Beispiele:

- (5) Fig.5.9 kann als Zentralriß eines Prismenflächenstumpfes gedeutet werden, wobei Z der Fluchtpunkt der Prismenerzeugenden ist.
- (6) Fig.5.10 kann als Zentralriß eines Zylinderflächenstumpfes gedeutet werden, wobei Z der Fluchtpunkt der Zylinderezeugenden ist.
- (7) Fig.5.3 kann als Zentralriß eines Prismenflächenstumpfes mit zur Bildebene parallelen Erzeugenden gedeutet werden.
- (8) Fig.5.4 kann als Zentralriß eines Zylinderflächenstumpfes mit zur Bildebene parallelen Erzeugenden gedeutet werden.

Der Schüler muß erkennen, daß mit Hilfe der perspektiven Affinitäten und der perspektiven Kollineationen verschiedenartige Aufgaben in gleicher Weise konstruktiv gelöst werden können. Entscheidend ist dabei das Auftreten einer Parallelperspektivität oder Perspektivität im Raum, die auf Grund der einfachen Definition dieser Abbildungen am Objekt leicht zu erkennen sind.

Die Zweckmäßigkeit der Unterscheidung zwischen Perspektivitäten und perspektiven Kollineationen ist analog wie in 5.2 zu begründen. Zur Festlegung einer perspektiven Kollineation benötigt man räumliche Überlegungen, dann aber werden nur die Gesetze $K1, K2$ und $K3$ benützt.

6. Zentralprojektion (Perspektive)

Bei ausgedehnten räumlichen Objekten liefert ein Parallelriß gelegentlich keinen wirklichkeitsnahen Eindruck. Die Konstruktion eines Zentralrisses sollte zumindest im *Durchschnittsverfahren*, das keine weitere Theorie erfordert, behandelt werden. Diese zu Unrecht oft vernachlässigte Methode ist auch zur Kreisdarstellung gut geeignet (vgl.8.7).

Da wir ein Objekt stets auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogen denken, kann nach Behandlung der Maßaufgaben $M1$ und $M3$ der Zentralriß eines Objekts gemäß der *axonomischen Methode* (vgl.6.2) aufgebaut werden. Dieses Verfahren wird verbessert, wenn man auch die Maßaufgabe $M2$ (vgl.6.3) in einem Zentralriß beherrscht.

6.1 Durchschnittsverfahren

Zur Konstruktion des Zentralrisses eines in Grund- und Aufriß gegebenen Objekts gibt man den Augpunkt O und die Bildebene π der Perspektive in diesen beiden Normalrissen an und ermittelt dort die Schnittpunkte der projizierenden Geraden der Perspektive durch die Objektpunkte mit π . Mit Hilfe der Fluchtpunkte und Fluchtgeraden (vgl. 5.3) der am Objekt beteiligten Geraden und Ebenen wird die Konstruktion des Zentralrisses erleichtert (vgl. Fig. 6.1).

In der Schule wird üblicherweise eine lotrechte Bildebene π verwendet¹; die zu π normale *Blickachse* ist dann parallel zu π_1 . Die vom Augpunkt weg zur Bildebene hin orientierte projizierende Blickachse heißt *Hauptsehstrahl* (vgl. 2.2) und der Schnittpunkt der Blickachse mit π *Hauptpunkt* H der Perspektive. Die horizontale Gerade durch H in π ist nach 5.3 die Fluchtgerade p_{1u}^c der Grundrißebene π_1 (und aller horizontalen Ebenen) und heißt *Horizont*; auf ihm liegen die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden.

Wir denken die Bildebene π richtig (vgl. 2.2) so in die Zeichenebene verlagert, daß der Hauptpunkt H etwa in die Mitte des für den Zentralriß vorgesehenen Zeichenfeldes liegt und der Horizont p_{1u}^c parallel zum unteren Rand des Zeichenfeldes verläuft. Verknüpfen wir mit π ein kartesisches Koordinatensystem $\{\xi, \eta\}$ zum Ursprung H mit der ξ -Achse im Horizont p_{1u}^c , so kann die ξ - bzw. η -Koordinate des Zentralrisses P^c eines Objektpunktes P oder eines Fluchtpunktes Y_u^c im Grundriß bzw. Aufriß unverzerrt abgelesen und im Zeichenfeld ins $\{\xi, \eta\}$ -Koordinatensystem eingetragen werden. Sichtbarkeitsfragen werden im Grund- und Aufriß geklärt.

Dieses Verfahren kann in der *Architektenanordnung* graphisch vereinfacht werden (vgl. Baugeometrie, Bd. 2, 7.2.3), doch genügt die obige Methode für die Schule.

Bem.: Um starke Verzerrungen zu vermeiden, sollte der Augpunkt O so gewählt werden, daß das Objekt in einem Drehkegel mit der Achse OH und dem Öffnungswinkel von etwa 60° liegt, der im Grundriß rasch festgelegt werden kann. Ein den Hauptpunkt fixierendes, im Augpunkt O befindliches menschliches Auge kann nur jenen Raumteil deutlich wahrnehmen, der etwa durch diesen Sehkegel berandet

¹Das Durchschnittsverfahren ist auch bei geneigter Bildebene zweckmäßig (vgl. Baugeometrie, Bd. 2, 7.2.4).

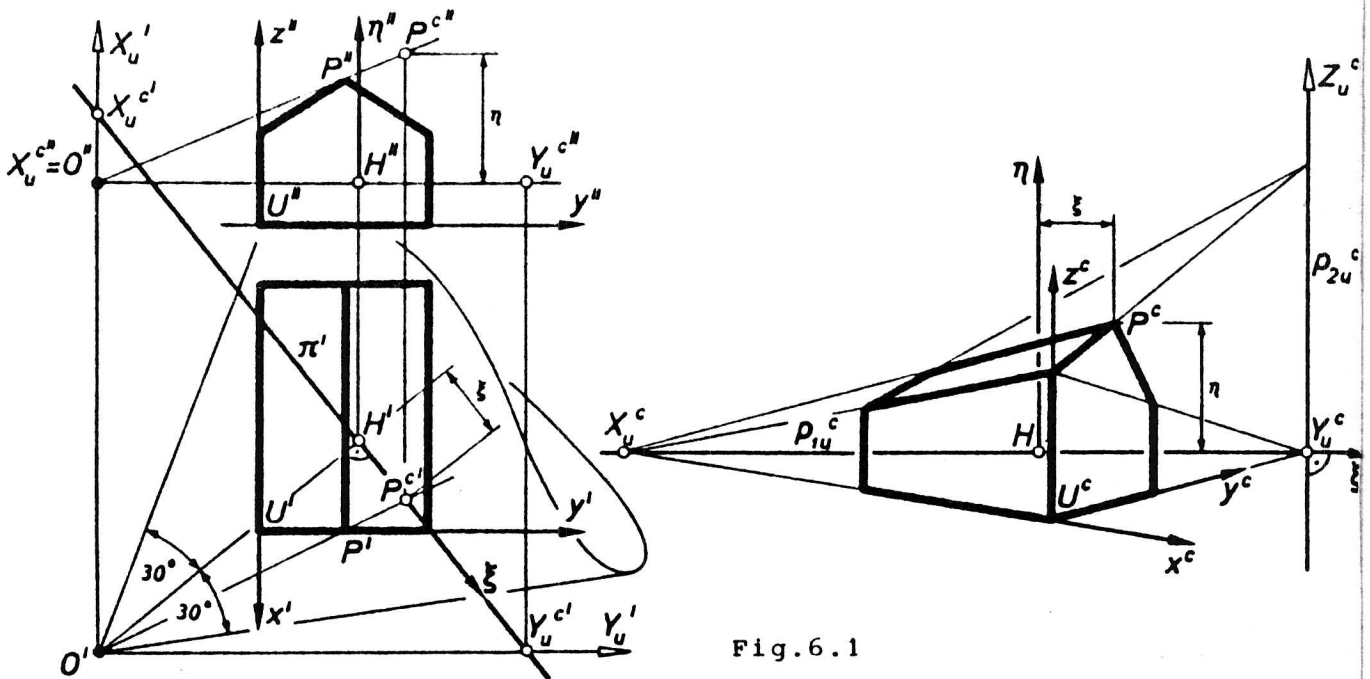


Fig. 6.1

wird. Der Abstand $\overline{O\pi} = \overline{OH} = d$ wird *Distanz der Perspektive* genannt.

6.2 Axonometrische Methode

Dazu muß man das Messen auf Geraden und die orthogonale Lage von Geraden und Ebenen im Zentralriß beherrschen.

M1: *Wahre Länge einer Strecke (P,Q) auf einer nichtprojizierenden Geraden g.*

Wir projizieren die Punkte P, Q parallel zu einer geeigneten Geraden r so auf die Bildebene π , daß die dabei entstehende Strecke (P^*, Q^*) in π die gleiche Länge wie die Strecke (P, Q) besitzt. Die zu r parallelen Geraden haben einen gemeinsamen Fernpunkt R_u . Erfüllt die Gerade r die Bedingung, daß $\overline{PQ} = \overline{P^*Q^*}$, also $\overline{PQ} = \overline{P^*C} \overline{Q^*C}$ gilt, so heißt der Fluchtpunkt R_u^c ein *Meßpunkt M_g* von g .

Ist die Gerade g speziell eine Hauptgerade h , die nicht in der Verschwindungsebene liegt, so kann die Gerade r beliebig, aber nicht parallel zu π , also der Meßpunkt M_h in irgendeinem eigentlichen Punkt von π gewählt werden. Die zu h^c parallele Gerade h^{*c} ist festgelegt, falls von einem Punkt A von h der Zentralriß A^{*c} des nach π parallel zu r projizierten Punktes A^* bekannt ist (Fig. 6.2).

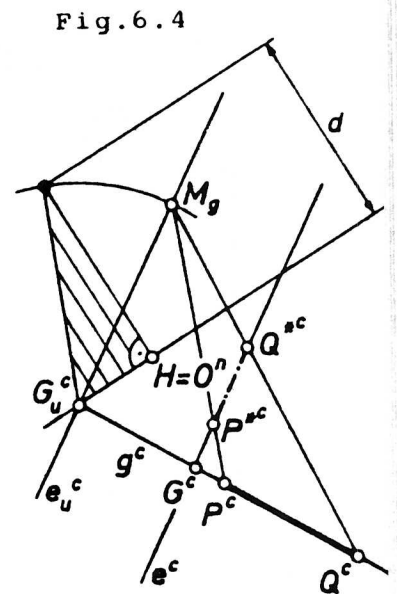
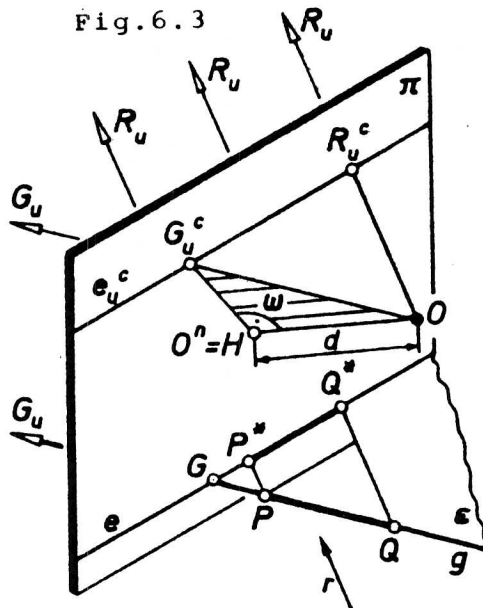
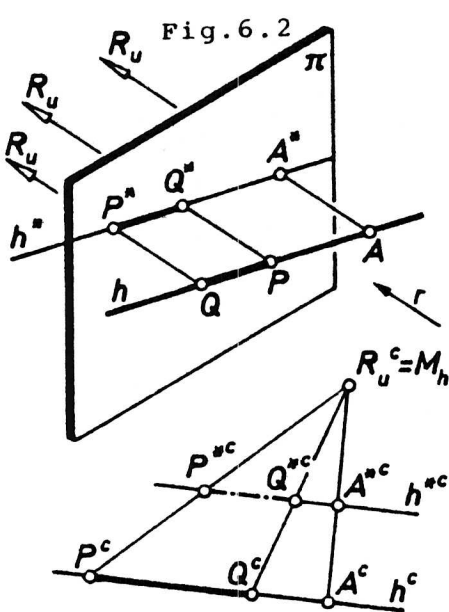
Ist die Gerade g keine Hauptgerade, so gilt bei Projektion parallel einer Geraden r auf Grund ähnlicher Dreiecke in Fig. 6.3:

$$(1) \quad \overline{P^*Q^*} : \overline{PQ} = \overline{R_u^c G_u^c} : \overline{OG_u^c}.$$

Wählt man R_u^c speziell so, daß $\overline{R_u^c G_u^c} = \overline{OG_u^c}$ gilt, so ist $\overline{PQ} = \overline{P^*Q^*} = \overline{P^*Q^{*c}}$ nach (1) und R_u^c ein Meßpunkt von g . Ein Meßpunkt M_g einer zu π nicht parallelen Geraden g hat also vom Fluchtpunkt G_u^c denselben Abstand wie der Augpunkt O und ist Meßpunkt jeder zu g parallelen Geraden.

Ist $n: \dot{P} \rightarrow \pi$ die Normalprojektion auf die Bildebene π der Perspektive, so gilt $O^n = H$ und $G_u^{cn} = G_u^c$. Der Abstand $\overline{OG_u^c}$ wird nach 3.4, M1 als Hypothense eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen $\overline{HG_u^c}$ und $d = \overline{OH}$ ermittelt (Fig.6.4).

Gehört die Gerade g einer durch den Zentralriß e^c ihrer Spur e und die Fluchtgerade e_u^c gegebenen Ebene ϵ an, so liegt nach Wahl von M_g mit $\overline{M_g G_u^c} = \overline{OG_u^c}$ speziell auf e_u^c der Zentralriß P^{*c} des nach $P^* \in \pi$ parallel projizierten Punktes $P \in g$ im Schnittpunkt des Zentralrisses $P^c M_g$ von PP^* mit e^c , da PP^* dann in ϵ verläuft; analoges gilt für Q^{*c} mit $Q \in g$ (Fig.6.4). Wir nennen dann M_g auf e_u^c einen Meßpunkt von g in ϵ .



M3: Orthogonale Lage einer Geraden und einer Ebene

Alle zu einer Ebene ϵ normalen Geraden besitzen denselben Fernpunkt N_u . Sein Zentralriß N_u^c , der Normalenfluchtpunkt von ϵ , fällt in den Spurpunkt der Normalen \tilde{n} zu ϵ durch den Augpunkt O und stimmt für alle zu ϵ parallelen Ebenen überein (Fig.6.5). Die zu π und ϵ normale Ebene ω durch O enthält \tilde{n} , und ω^n ist die Normale aus $O^n = H$ auf e_u^c . Im mit dem Abbildungszeiger a beschrifteten Seitenriß in ω ist \tilde{n}^a normal zum Seitenriß $\tilde{\epsilon}^a$ der

zu ϵ parallelen Ebene $\tilde{\epsilon} = Oe_u^c$. Wählt man $H^a = H$, so fällt der Riß π^a mit ω^n zusammen, und O^a liegt auf dem zu π^a normalen Ordner durch $O^n = H$ mit $\overline{O^a H^a} = \overline{OH} = d$ (Fig. 6.6).

Ist ϵ speziell eine Hauptebene, so steht n zu π normal, sodaß $N_u^c = H$ gilt.

Diese beiden Maßaufgaben reichen aus, um nach der axonometrischen Methode Zentralrisse zu zeichnen. Im Falle einer lotrechten Bildebene π ist der Horizont p_{1u}^c im Zeichenfeld die horizontale Gerade durch den Hauptpunkt H und enthält den Fluchtpunkt X_u^c bzw. Y_u^c der horizontalen x - bzw. y -Achse. Gibt man den Hauptpunkt H , die Distanz d , den Horizont p_{1u}^c durch H und parallel zu p_{1u}^c den Zentralriß p_1^c der Spur p_1 von π_1 , sowie den Zentralriß U^c des Ursprungs U und den Zentralriß einer Koordinatenachse in π_1 , samt Orientierungspfeil, etwa der x -Achse an, so kann der Zentralriß des Koordinatensystems ergänzt werden (Fig. 6.7): Aus $\{X_u^c\} = x^c \cap p_{1u}^c$ erhält man die Fluchtgerade p_{2u}^c der zur x -Achse normalen Aufrißebene π_2 nach M3, welche p_{1u}^c im Fluchtpunkt Y_u^c der y -Achse

Fig. 6.5

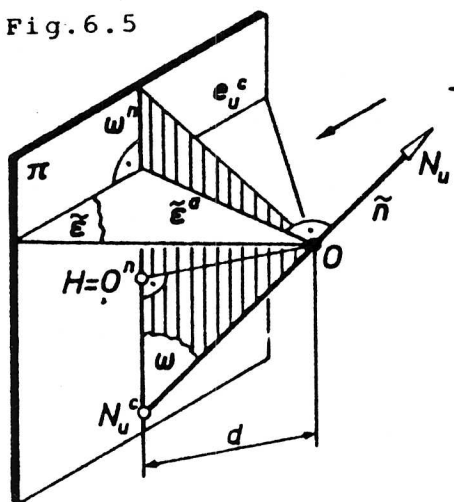


Fig. 6.6

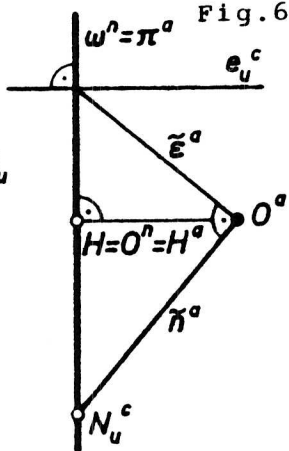
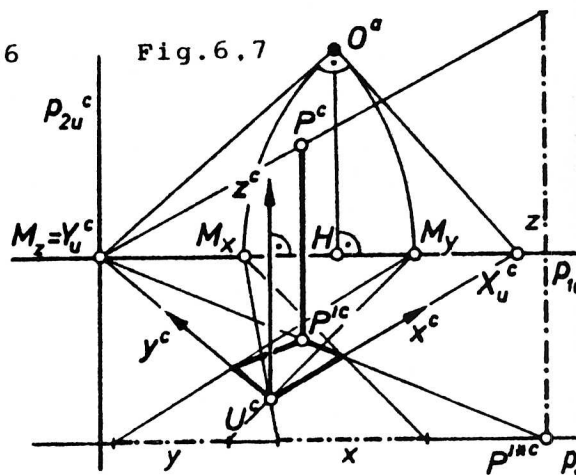


Fig. 6.7



schneidet. Die z -Achse ist eine Hauptgerade, also zu ihrem Zentralriß z^c parallel, sodaß z^c auf p_{1u}^c normal steht. Wir orientieren den Zentralriß der z -Achse zum oberen Blattrand hin. Der Augpunkt O liegt über π_1 , falls p_{1u}^c oberhalb p_1^c verläuft; der Orientierungspfeil des Zentralrisses der x -Achse geht dann in den Orientierungspfeil des Zentralrisses der y -Achse auf kürzesten Weg durch eine positive Drehung über. Damit ist die Sichtbarkeit des Zentralrisses bestimmt.

Durch Einmessen der x - und y -Koordinate eines Objektpunktes P enthält man den Zentralgrundriß P^c . Ist keine dieser beiden Achsen

eine Hauptgerade, so benützt man dazu Meßpunkte M_x, M_y von x, y in π_1 , welche sich nach M1 auf dem Horizont p_{1u}^c mit $\overline{M_x X_u^c} = \overline{O X_u^c}$, $\overline{M_y Y_u^c} = \overline{O Y_u^c}$ ergeben. Auf der z -Parallelen $P'P$ wird die z -Koordinate von P gemäß M1 mit Hilfe eines beliebigen eigentlichen Meßpunkts M_z auf p_{1u}^c eingemessen; bei horizontaler Parallelprojektion von $P'P$ in die Bildebene kommt P' nämlich in einen Punkt P'^* der Spur p_1 von π_1 zu liegen.

Liegt speziell X_u^c im Hauptpunkt H , so ist nach M3 dann π_2 eine Hauptebene und die y -Achse eine Hauptgerade. Bei dieser *frontalen Perspektive* benötigt man den Meßpunkt M_x von x in π_1 mit $\overline{M_x X_u^c} = \overline{O X_u^c}$, also $\overline{M_x H} = \overline{O H} = d$; auf der Hauptgeraden y wird nach M1 mit Hilfe eines beliebigen eigentlichen Meßpunktes M_y auf p_{1u}^c eingemessen.

6.3 Paralleldrehen einer Ebene

Es ist nicht sinnvoll, das Paralleldrehen zuerst für horizontale und dann für lotrechte Ebenen getrennt zu behandeln und dadurch das einfache allgemeine Prinzip zu verschleiern. Da zur Kreisdarstellung die Drehung um eine Hauptgerade graphisch oft günstiger als das Drehen um die Spur und beides in gleicher Weise zu behandeln ist, beschränke man sich nicht auf Drehen in die Bildebene.

Nach 5.1, (3) gilt: Wird eine Ebene ϵ , die keine Hauptebene ist, um eine Hauptgerade $hc\epsilon$ in die Hauptebene ϵ_0 gedreht, so ist die parallelgedrehte Lage $F_0 c \epsilon_0$ einer Figur $F c \epsilon$ zu F parallelperspektiv, wobei h die Perspektivitätsachse und die Drehsehnen die Perspektivitätsgeraden sind; natürlich ist F_0 zu F kongruent. Aus 5.5 folgt: Für eine nicht projizierende Ebene ϵ ist F_0^c zu F^c perspektiv kollinear mit h^c als Kollineationsachse und dem Meßpunkt M_ϵ von ϵ genannten Fluchtpunkt der parallelen Drehsehnen als Kollineationszentrum. Nach 5.4 ist F_0^c zu F_0 und damit zu F ähnlich und für $\epsilon_0 = \pi$, also einer Paralleldrehung von ϵ um die Spur, zu F_0 und damit zu F sogar kongruent.

Der Meßpunkt M_ϵ ist der Spurpunkt der zu den Drehsehnen parallelen projizierenden Geraden. Diese verläuft in der zur Bildebene π und der Fluchtgeraden e_u^c von ϵ normalen Ebene ω durch den Augpunkt O (Fig. 6.8). Die in ω liegenden schraffierten Dreiecke aus Fig. 6.8 sind ähnlich, also beide gleichschenkelig, was $\overline{M_\epsilon e_u^c} = \overline{O e_u^c}$ ergibt. In der Zeichnung ist ω^n die zu e_u^c normale Gerade durch $O^n = H$; wählt man H^a in H , so fällt der Riß π^a mit ω^n zusammen und O^a liegt auf dem zu π^a normalen Ordner durch $O^n = H$ mit $\overline{O^a H^a} = \overline{O H} = d$ (Fig. 6.9).

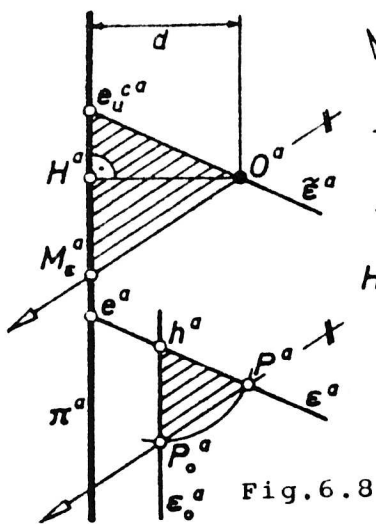


Fig. 6.8

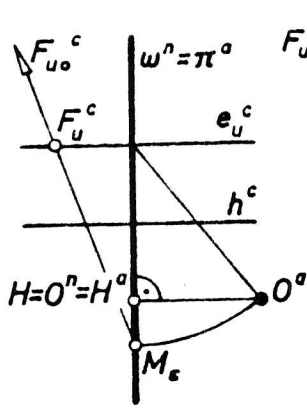


Fig. 6.9

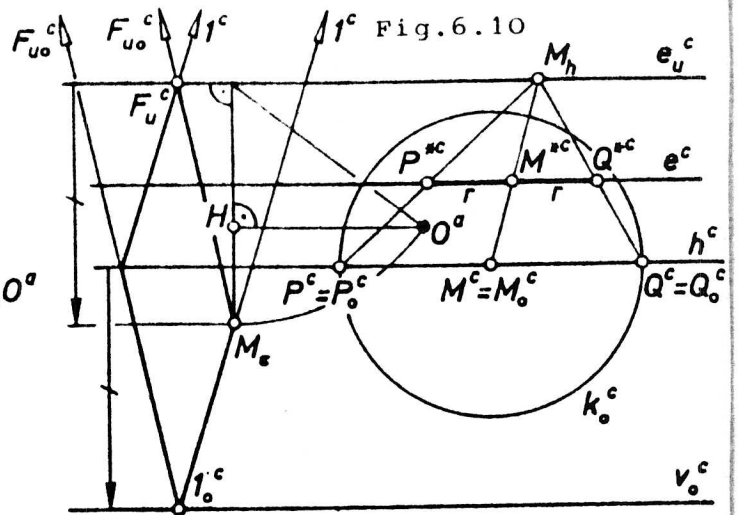


Fig. 6.10

Jeder Fluchtpunkt F_u^c auf e_u^c ist der Zentralriß eines Fernpunkts F_u der Ebene ϵ . Somit ist F_{uo} ein Fernpunkt von ϵ_o und F_{uo}^c ein Fernpunkt von π , und zwar der Fernpunkt der Verbindungsgeraden von F_u^c mit dem Kollinationszentrum M_ϵ . Damit ist die perspektive Kollination $(M_\epsilon, h^c; F_u^c \mapsto F_{uo}^c)$ festgelegt, welche F^c in F_o^c überführt.

Fig. 6.11 zeigt die Ermittlung des Zentralgrundrisses eines Objekts durch Paralleldrehen von π , um die Spur p_1 . Der nach obiger Vorschrift ermittelte Meßpunkt 1M_1 von π_1 ergibt sich auf einer Normalen zum Horizont p_{1u}^c im Abstand d von H . Durch Anwendung der perspektiven Kollination $^2(M_1, p_1^c; F_{uo}^c \mapsto F_u^c)$ mit F_u^c beliebig auf p_{1u}^c erhält man aus dem unverzerrten Zentralriß des gedrehten Grundrisses den Zentralgrundriß. Einmessen der z -Koordinate nach M_1 liefert dann den Zentralriß des Objekts.

Bei der Darstellung eines Kreises $k(M, \epsilon; r)$ dreht man zweckmäßig die Kreisebene um die Hauptgerade h von ϵ durch M parallel π . Durch Einmessen des Radius auf h gemäß M_1 mit Hilfe eines Meßpunkts M_h auf e_u^c erhält man zwei Punkte P^c, Q^c von k^c , die auch dem Kreis k_o^c mit Mittelpunkt $M^c = M_o^c$ angehören (Fig. 6.10). Die in 8.6 besprochene Konstruktion des Kegelschnitts k^c , der in der perspektiven Kollination $(M_\epsilon, h^c; F_{uo}^c \mapsto F_u^c)$ mit F_u^c beliebig auf

¹Bei komplizierten Grundrissen ist es wünschenswert, daß der Zentralriß des gedrehten xy -Systems ein Rechtssystem ist. Dann muß man M_1 unter p_{1u}^c wählen, falls O über π_1 , also p_{1u}^c über p_1^c liegt. Die ¹Fig. 6.11 zeigt dagegen in der parallelgedrehten Lage eine Ansicht von unten.

²Da jede perspektive Kollination als Abbildung eine Richtung hat, ist zwischen der perspektiven Kollination $(M_\epsilon, h^c; F_u^c \mapsto F_{uo}^c)$, die F^c in F_o^c überführt, und der dazu inversen perspektiven Kollination $(M_\epsilon, h^c; F_{uo}^c \mapsto F_u^c)$, die F_o^c in F^c überführt, genau zu unterscheiden.

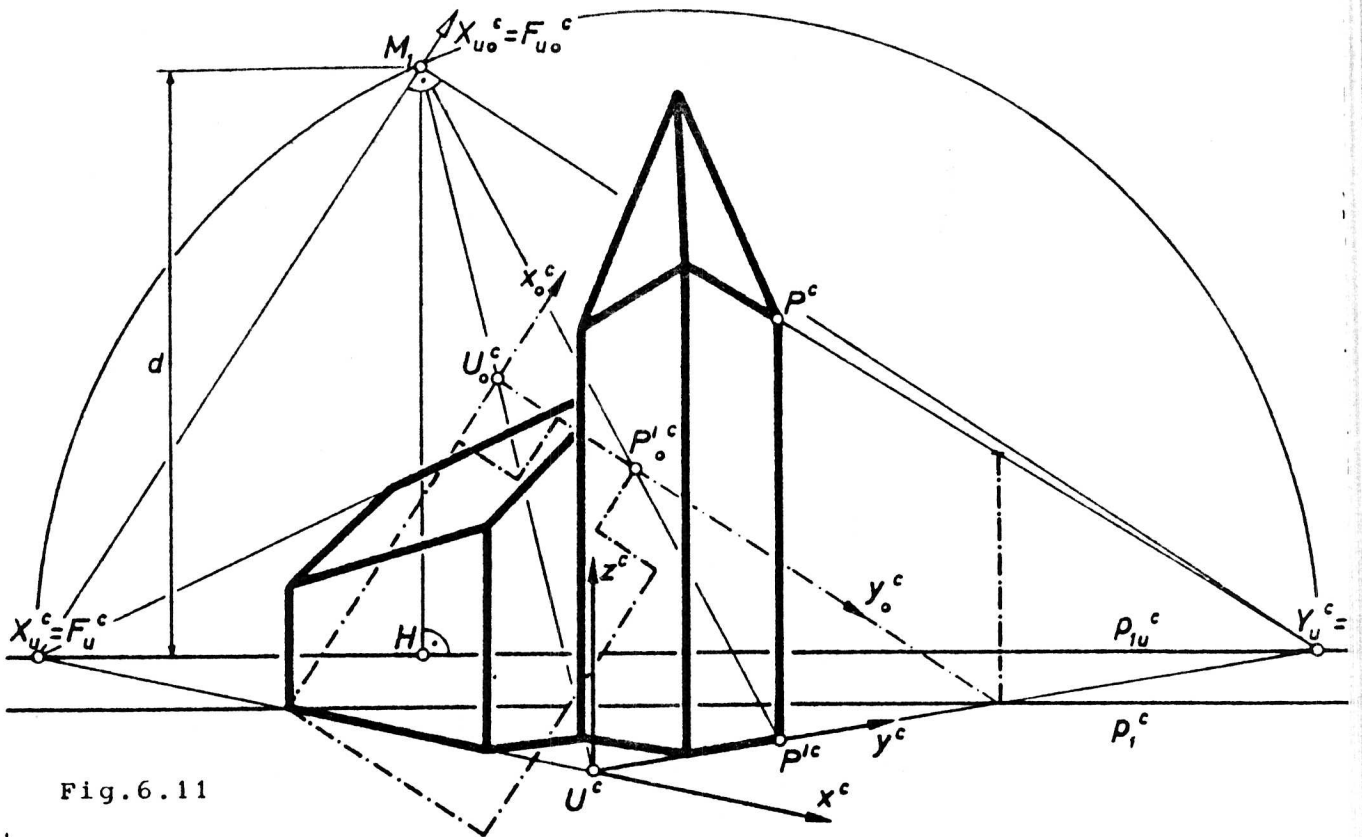


Fig.6.11

e_u^c aus dem Kreis k_o^c entsteht, benötigt den Zentralriß v_o^c der parallelgedrehten Lage v_o der Verschwindungsgeraden v von ϵ , welche bei der genannten perspektiven Kollineation in die Ferngerade von π übergeht. Da v eine zu h parallele Hauptgerade von ϵ ist, verläuft v_o zu h und daher v_o^c zu h^c parallel. Ist l^c ein Fernpunkt von π , so liegt sein Ursprung l_o^c in $(M_\epsilon, h^c; F_{u_o}^c \rightarrow F_u^c)$ auf v_o^c . Auf Grund des in der Fig.6.10 auftretenden Parallelogramms gilt:

Der orientierte Abstand von der Fluchtgeraden e_u^c der Ebene ϵ zu ihrem Meßpunkt M_ϵ ist gleich dem orientierten Abstand vom Zentralriß h^c der Drehachse h zum Zentralriß v_o^c der parallelgedrehten Verschwindungsgeraden v von ϵ .

7. Parallelriß eines Kreises

7.1 Planimetrische Ergänzungen zur Ellipse

Aus dem Mathematikunterricht ist die Brennpunktdefinition einer Ellipse e als Menge aller Punkte einer Ebene ϵ bekannt, für die gilt:

$$(1) \quad e = \{P \in \epsilon \mid \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a, F_1, F_2 \in \epsilon, 2a > \overline{F_1F_2} > 0\}.$$

Ist dagegen $F_1 = F_2$, so erhält man einen Kreis, der i.f. als Sonderfall einer Ellipse angesehen wird. Wir benötigen die Begriffe *Brennpunkt, Mittelpunkt, Hauptachse, Hauptachsenlänge $2a$, Hauptscheitel, Nebenachse, Nebenachsenlänge $2b$ ($a > b > 0$), Nebenscheitel, Hauptscheitelkreis, Nebenscheitelkreis.*

Es besteht kein Grund, die aus dem Mathematikunterricht bekannte Gleichung der Ellipse in "Hauptlage" in der Darstellenden Geometrie nicht zu benutzen. Die dadurch gewonnene Zeitersparnis rechtfertigt sogar die folgende Herleitung, falls die Gleichung nicht bekannt ist.

Mit $F_1(-e|0)$, $F_2(e|0)$, $P(x|y)$, $\overline{PF_1} =: f_1$, $\overline{PF_2} =: f_2$ und $f_1 + f_2 = 2a$ folgt $f_1^2 - f_2^2 = 2a(f_1 - f_2) = [((x+e)^2 + y^2) - ((x-e)^2 + y^2)] = 4ex$, also $f_1 - f_2 = 2\frac{e}{a}x$. Damit gilt $f_1 = a + \frac{e}{a}x$, also $f_1^2 = (a + \frac{e}{a}x)^2 = (x+e)^2 + y^2$ und daher

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{mit } b^2 := a^2 - e^2 > 0.$$

Für $e=0$, also $a=b$, liegt ein Kreis vor. Umgekehrt folgt für $P(x|y)$ aus (2) und (1) dann $P \in c$.

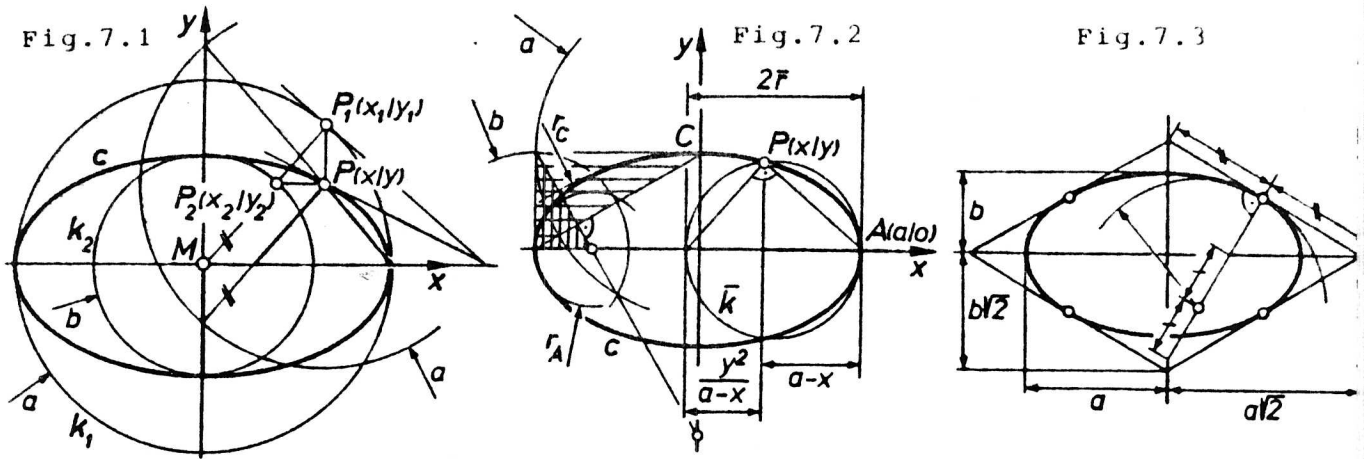
Der Hauptscheitelkreis k_1 der Ellipse mit der Gleichung (2) besitzt die Gleichung $x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0$. Daraus ergibt sich eine punktweise Ellipsenkonstruktion:

Schneidet eine Gerade durch den Mittelpunkt M der Ellipse den Hauptscheitelkreis in $P_1(x_1|y_1)$ und den Nebenscheitelkreis in $P_2(x_2|y_2)$, so ist der Schnittpunkt der Nebenachsenparallelen durch P_1 mit der Hauptachsenparallelen durch P_2 ein Punkt P der Ellipse (Fig.7.1); dies folgt aus (2), $\overline{MP_1} : \overline{MP_2} = a : b = y_1 : y_2$, $x_1 = x$ und der Gleichung von k_1 .

Anstelle der punktweisen Konstruktion mit Hilfe der Brennpunkte sollte diese, gelegentlich PH.DE LA HIRE (1685) zugeschriebene *Scheitelkreiskonstruktion* verwendet werden.

Verschiebt man MP_1 durch P parallel, so erhält man die folgende Konstruktion der halben Nebenachsenlänge, falls die beiden Hauptscheitel und ein Ellipsenpunkt P bekannt sind: Schlägt man die halbe Hauptachsenlänge a von P auf der Nebenachse ab, so ist "das Stück vom Ellipsenpunkt P zur Hauptachse" gleich b ; aus Symmetriegründen kann jede der beiden Lösungen verwendet werden (Fig.7.1). Auf dieser *Papierstreifenkonstruktion*, welche schon PROKLOS DIADOCHOS (410-485) bekannt war, beruht der Ellipsenzirkel.

Für das Zeichnen der Ellipse benötigt man unbedingt die Scheitelkrümmungskreise. Will man die Konstruktion begründen, so ist ein analytischer Beweis vorzuziehen, weil dieser der Definition des Scheitelkrümmungskreises angepaßt ist, Beziehungen zur Mathematik pflegt und vor allem für die Scheitel aller Kegelschnitte gleich funktioniert. Bei einem Beweis durch räumliche Deutung ist die Diskussion bei den drei Kegelschnitttypen verschieden und bei der



Ellipse im Nebenscheitel anders als im Hauptscheitel.

Der Krümmungskreis einer nicht geradlinigen ebenen Kurve c in einem Punkt A ist die Grenzlage eines Kreises \bar{k} , der c in A berührt und einen weiteren Punkt $P \in c$ enthält, wenn P auf c in den Punkt A wandert.

Bem.: (a) Im Falle der Ellipse c mit der Gleichung (2) folgt mit $P(x|y) \in c$ und $A(a|0)$ für den Radius \bar{r} von \bar{k} unter Verwendung des Höhensatzes $2\bar{r} = (a-x) + \frac{y^2}{a-x}$ (vgl. Fig. 7.2) mit $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a+x)(a-x)$, also

$$\lim_{P \rightarrow A} 2\bar{r} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{y^2}{a-x} = \frac{b^2}{a^2} \lim_{x \rightarrow a} (a+x) = 2\frac{b^2}{a},$$

was für den Radius r_A des Scheitelkrümmungskreises in A mit $r_A : b = b : a$ die Konstruktion in Fig. 7.2 ergibt. Vertauscht man a mit b , so entsteht für den Nebenscheitel $C(0|b)$ dann $r_C : a = a : b$.

Für den Lehrer seien folgende Hilfen zum Zeichnen von Ellipsen genannt:

(1) Beim Zeichnen in großer Strichstärke ist es zweckmäßig, nicht im Krümmungsmittelpunkt, sondern etwas näher beim Ellipsenmittelpunkt einzustechen.

(2) Graphisch günstige Zwischenpunkte sind jene, deren Tangenten einen Rhombus mit den Berührungspunkten in den Mitten der Rhombusseiten bestimmen. Die Fig. 7.3 zeigt die Konstruktion dieser Ellipsenpunkte und ihrer Krümmungsmittelpunkte.

7.2 Normalriß eines Kreises, Kugelfläche

Ein Kreis k im Raum ist festgelegt durch seine Ebene ϵ , seinen Mittelpunkt M und seinen Radius r ; anstelle von ϵ kann die zu ϵ normale Drehachse n (vgl. 3.4, M2) von k angegeben werden. Ist ϵ bezüglich einer Normalprojektion $n: P \rightarrow \pi$ projizierend, so ist k^n eine zu M^n symmetrische Strecke der Länge $2r$ auf ϵ^n .

Ist ϵ nicht projizierend und verwenden wir den Mittelpunkt M von k als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems $\{\xi, \eta\}$ in ϵ , dessen ξ -Achse die Hauptgerade h von ϵ durch M ist (Fig.7.4), so bilden die Normalrisse dieser Achsen nach 2.4, (N) ein kartesisches Koordinatensystem $\{x, y\}$ in der Bildebene π ; für $P(\xi|\eta) \in \epsilon$ und $P^n(x|y) \in \pi$ gilt unter Verwendung des Winkels α der Ebene ϵ gegen die Ebene π

$$(3) \quad x = \xi, \quad y = \eta \cos \alpha \quad (0 \leq \alpha < 90^\circ).$$

Durchläuft der Punkt P den Kreis k , so gilt $\xi^2 + \eta^2 - r^2 = 0$; die Normalrisse P^n dieser Punkte durchlaufen nach (3) die Kurve $k^n \subset \pi$ mit der Gleichung $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 \cos^2 \alpha} - 1 = 0$. Daraus folgt:

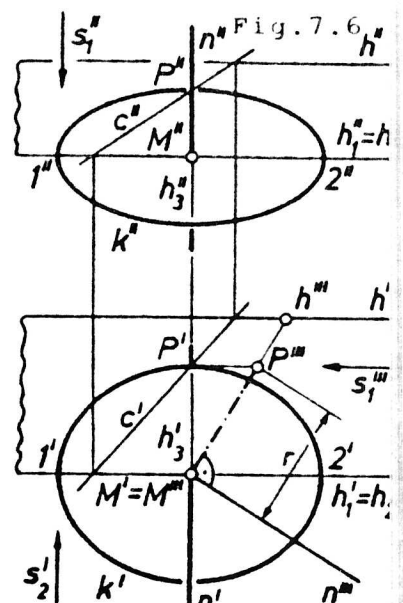
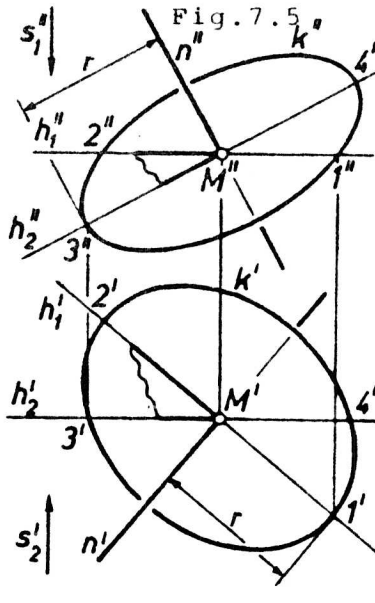
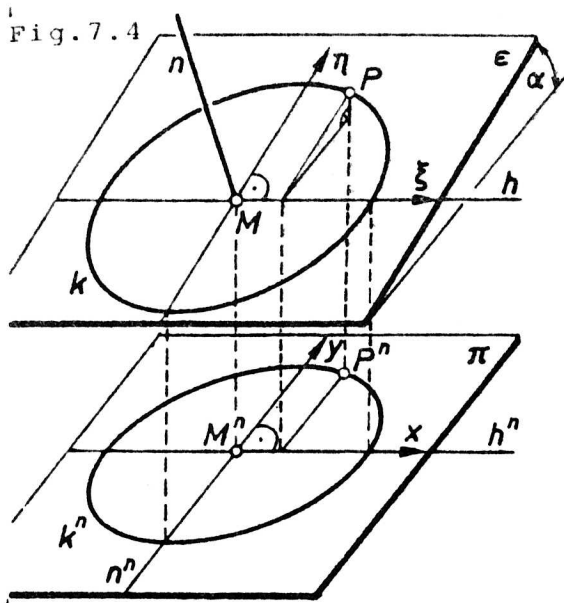
1. Für $\alpha = 0^\circ$, also eine Hauptebene ϵ , ist k^n ein zu k kongruenter Kreis (vgl. 2.3, 6).
2. Für $\alpha \neq 0^\circ$ ist k^n eine Ellipse, deren Hauptachse der Normalriß der Hauptgeraden h in ϵ durch M und deren halbe Hauptachsenlänge gleich dem Radius r von k ist.
3. Jede Ellipse in π ist Normalriß eines Kreises ($r = a$, $\cos \alpha = b : a < 1$).
4. Der Normalriß n^n der Drehachse n von k fällt für $\alpha \neq 0^\circ$ in die Nebenachse der Ellipse k^n . (Folgt aus 2 und 2.4, (N)).

Figuren, an denen Kreise, aber keine die Kreise tragenden Flächen beteiligt sind, gewinnen sehr an Anschaulichkeit, wenn man jeden Kreis als undurchsichtige Scheibe auffaßt und seine Drehachse unter Berücksichtigung der Sichtbarkeit, welche mit Hilfe beschrifteter Kreispunkte nach 3.3 entschieden wird, einzeichnet (vgl. Fig.7.5).

Bem.: (a) Der ellipsenförmige Normalriß eines Kreises wird stets über die Hauptscheitel und einen Punkt gemäß 7.1 konstruiert und nicht mit Hilfe konjugierter Durchmesser.

In gepaarten Normalrissen, z.B. Grundriß und Aufriß, wird die Kreisebene ϵ nach 3.3 durch einen Zwickel bestehend aus einer ersten und einer zweiten Hauptgeraden h_1, h_2 durch M festgelegt, was in jedem Riß die obige Angabe für die Bildellipse ergibt (Fig.7.5). Gilt speziell $h_1 = h_2$, ist also ϵ drittprojizierend und durch einen Streifen aus parallelen Hauptgeraden h und h_1 bestimmt, so erhält man durch Einmessen des Radius auf der zu h_1 normalen Geraden h_3 in ϵ durch M die Nebenscheitel (Fig.7.6). (Fig.7.6 zeigt auch die Vervollständigungsaufgabe für h_3 , vgl. 3.3).

Dreht man die Kreisebene ϵ um h parallel zu π , also $k \subset \epsilon$ in den Kreis $k_0 \subset \epsilon_0$, so ist k_0^n nach 1 und 2 der Hauptscheitelkreis der



Ellipse k^n . Da nach 3 jede Ellipse als Normalriß eines Kreises aufgefaßt werden kann, gilt mit 5.2,1:

Jede Ellipse ist zu ihrem Hauptscheitelkreis orthogonal perspektiv affin mit der Hauptachse als Affinitätsachse.

Bem.: (b) Damit kann die in 7.1 angegebene punktweise Konstruktion zu einer tangentialweisen Konstruktion (Fig.7.1) ausgebaut werden (vgl.auch 7.3).

Man vermeide die Konstruktion der Ellipsentangenten mit Hilfe der Brennpunkte.

Auch in normaler Axonometrie wird das Bild eines Kreises k durch Hauptscheitel und einen Punkt festgelegt. Ist die Kreisebene ϵ speziell parallel zu einer Koordinatenebene, so erhält man unter Verwendung von Parallelen zu den Koordinatenachsen dieser Koordinatenebene einen Punkt des Kreises (Fig.7.7). Ist k der Leitkreis einer Drehkegelfläche mit der Spitze S , so werden die Tangenten aus S^n an k^n , also der scheinbare Umriß der Kegelfläche, zweckmäßig mit Hilfe der orthogonalen perspektiven Affinität zum Nebenscheitelkreis konstruiert (vgl.7.3). Die Sichtbarkeit ergibt sich nach 4.1 aus der Beschriftung der Bilder der Koordinatenachsen.

Die konstruktive Behandlung einer Kugelfläche erfolgt zweckmäßig in Normalprojektion und wird durch die folgenden beiden Aussagen beherrscht:

(K1) Die Drehachse eines Kreises auf einer Kugelfläche geht stets durch den Kugelmittelpunkt.

(K2) Der wahre Umriß einer Kugelfläche ist jener Großkreis, dessen Drehachse eine projizierende Gerade ist.

Analog zu 5.1, Bem.(a) und 5.4, Bem.(a) ist zwischen *Kugel* und *Kugelfläche* (Sphäre) zu unterscheiden.

Die Begriffe *Tangentialebene*, *wahrer Umriß* und *scheinbarer Umriß* gehören zum Elementarstoff. Bei Kegelflächen und Zylinderflächen kann man zunächst von jenen Erzeugenden sprechen, deren Risse den Bildbereich der Flächen beranden.

Der Schüler muß verstehen, was bei der Projektion einer Fläche geschieht: Da jede Fläche eine Punktmenge ist, stellt ihr Riß eine Punktmenge der Bildebene dar. Um diese festzulegen sind einerseits die Randkurven der Fläche abzubilden (bei Objekten ist eine Fläche stets in Randkurven eingespannt) und andererseits ihr scheinbarer Umriß zu konstruieren.

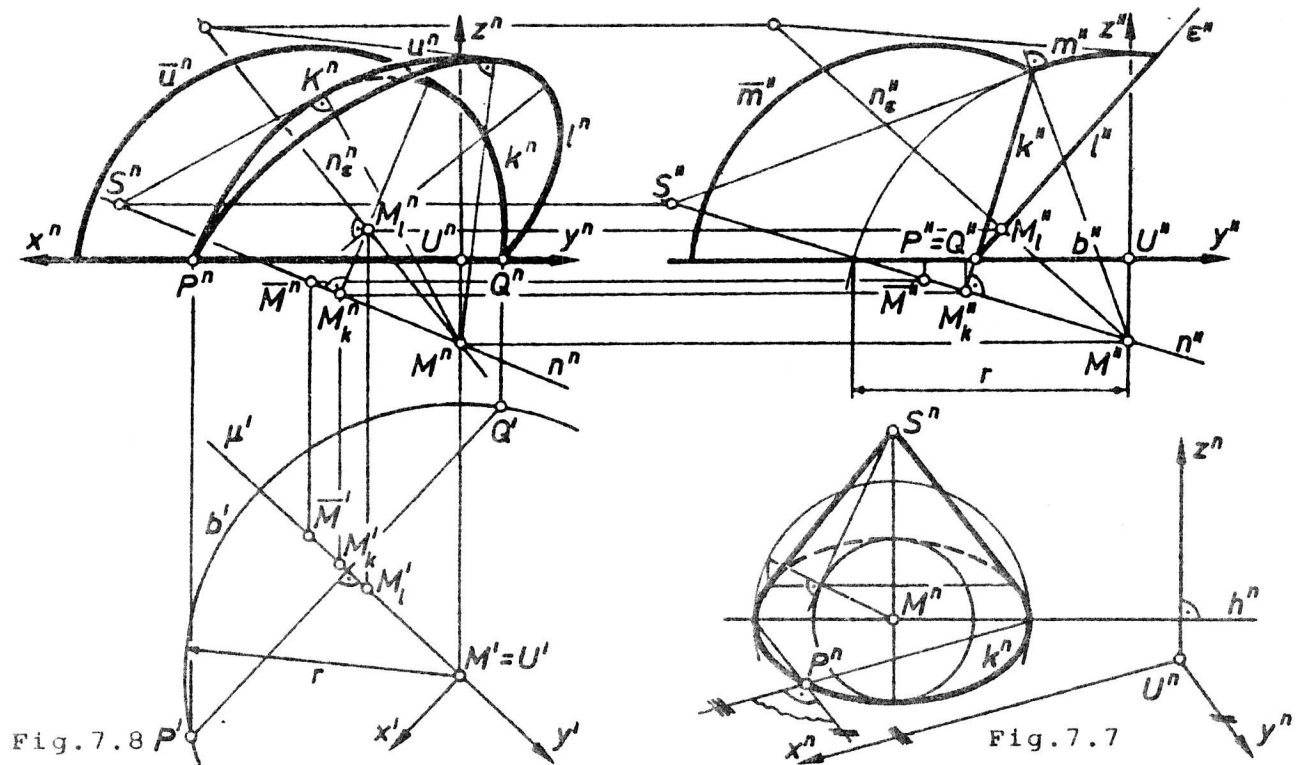


Fig.7.8 zeigt eine aus zwei Kugelflächen $\phi, \bar{\phi}$ bestehende Schale in einem Schnellriß mit $\psi=0^\circ$ (vgl.4.2). Die gemeinsame erstprojizierende Durchmessersebene μ wird als Aufrißebene benutzt; Grund- und Aufriß sind durch die doppelt auftretenden y -Koordinaten gekoppelt. Der Schnittkreis k der beiden Kugelflächen muß nach (K1) die Verbindungsgeraden n der beiden Kugelmittelpunkte M, \bar{M} als Drehachse besitzen. Der Schnittkreis k und der Randkreis l in der zweitprojizierenden Ebene ϵ haben ellipsenförmige Normalrisse, die durch die Normalrisse ihrer Drehachsen n und n_e , ihre im Aufriß erkennbaren Radien und die gemeinsamen Punkte P, Q in der Standebene π_1 , welche auch auf dem Schnittkreis b von ϕ mit π_1 liegen, bestimmt sind. Der Umrißpunkt K

auf k bezüglich ϕ wird mit Hilfe des die Kugelfläche ϕ längs k berührend umschriebenen Drehkegelflächen, deren Spitze S auf n liegt, gefunden; analoges gilt für den Umrißpunkt auf l .

7.3 Affine Eigenschaften einer Ellipse

Nach 7.2 ist jede Ellipse zu ihrem Hauptscheitelkreis perspektiv affin. Damit können folgende Begriffsbildungen über Kreise, welche bei einer perspektiven Affinität erhalten bleiben, auf Ellipsen übertragen werden: *Durchmessergerade*, *Durchmesser* (das ist die auf einer Durchmessergeraden durch die beiden Ellipsenpunkte bestimmte Strecke; in den zum Mittelpunkt der Ellipse symmetrischen Endpunkten eines Durchmessers sind die Tangenten parallel), *konjugierte Durchmesser* (die Tangenten in den Endpunkten des einen sind zum anderen parallel; da konjugierte Durchmesser des zur Ellipse perspektiv affinen Hauptscheitelkreises orthogonal sind, ist die Konjugiertheit eine symmetrische Beziehung). Die Achsen einer Ellipse sind orthogonale konjugierte Durchmesser.

Bem.: (a) Die Diagonalen eines Parallelogramms, das einer Ellipse umschrieben ist, tragen konjugierte Durchmesser. (Jedes einem Kreis umschriebene Parallelogramm ist nämlich ein Rhombus, dessen Diagonalen daher orthogonal sind).

Durch ein Paar konjugierter Durchmesser ist genau eine Ellipse festgelegt.

Beweis. Ist e eine Ellipse mit dem Hauptscheitelkreis k_1 und dem Nebenscheitelkreis k_2 , so entstehen bei der orthogonalen perspektiven Affinität mit $k_1 \rightarrow e$ aus orthogonalen Radien (M, P_1) , (M, Q_1) von k_1 konjugierte Halbmesser (M, P) und (M, Q) von e . Die Scheitelkreisconstruction der Punkte¹ P, Q benützt die Punkte P_2, Q_2 auf dem Nebenscheitelkreis k_2 (Fig. 7.9). Die Rechtwinkeldrehung von Q_1 nach P_1 um M führt Q in einen Punkt Q_0 über, wobei $\{P_1, Q_0, P_2, P\}$ ein achsenparalleles Rechteck mit dem Mittelpunkt S ist. Schneidet PS die Hauptachse in H und die Nebenachse in N , so gilt $\overline{SM} = \overline{SH} = \overline{SN}$ und $\overline{PN} = \overline{P_1M} = \overline{Q_0H} = a$ und $\overline{PH} = \overline{P_2M} = \overline{Q_0N} = b$.

¹ Aus dieser Konstruktion folgt, daß von den Achsen verschiedene konjugierte Durchmesser einer nicht kreisförmigen Ellipse nie orthogonal sind. Eine Ellipse ist genau dann ein Kreis, wenn sie zwei orthogonale gleich lang konjugierte Halbmesser besitzt.

Sind nun die konjugierten Halbmesser (M,P) , (M,Q) gegeben, so können mit Hilfe der eben hergeleiteten RYTZschen Achsenkonstruktion (Fig.7.9) die Achsen und die Achsenlängen eindeutig rekonstruiert werden, wenn man beachtet, daß S zwischen P und N liegt. \square

Bem.: (a) Diese nach D.RYTZ (1845) benannte Konstruktion kommt im wesentlichen bereits bei A.FREZIER (1754) vor.

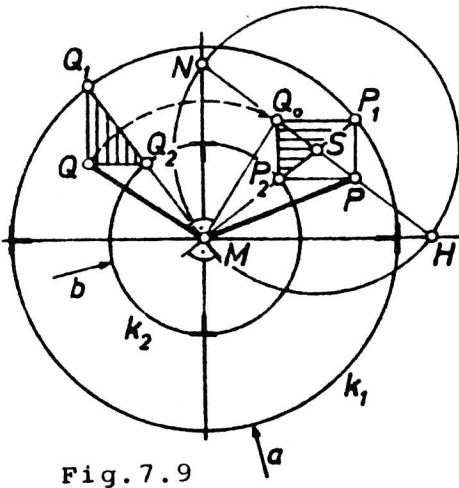


Fig. 7.9

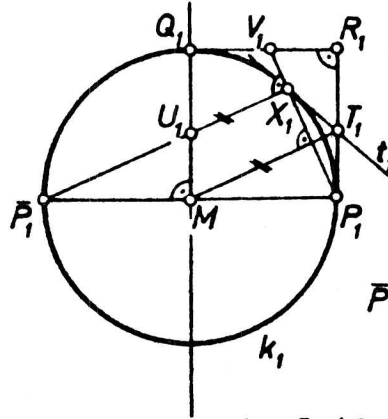


Fig. 7.10

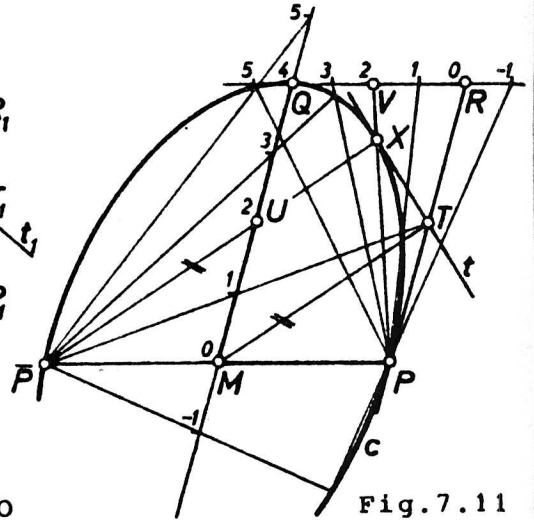


Fig. 7.11

Faßt man die Kreise gemäß 7.1 als spezielle Ellipsen auf, so gilt:

Bei einer perspektiven Affinität $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ geht eine Ellipse $c \subset \pi$ in eine Ellipse $\alpha(c) \subset \pi$ über.

Beweis. (a) Sind (M,P_1) , (M,Q_1) zwei orthogonale Halbmesser eines Kreises k_1 und R_1 der Schnittpunkt der Tangenten von k_1 in P_1 und Q_1 (Fig.7.10), so sind für jeden Punkt $X_1 \in k_1$, der von P_1 und vom Gegenpunkt \bar{P}_1 zu P_1 verschieden ist, die Dreiecke $\{\bar{P}_1, M, U_1\}$ und $\{P_1, R_1, V_1\}$ mit $\{U_1\} = \bar{P}_1 X_1 \cap M Q_1$, $\{V_1\} = P_1 X_1 \cap R_1 Q_1$ nach dem Satz von THALES kongruent. Daraus folgt $TV(U_1, Q_1, M) = TV(V_1, Q_1, R_1)$ wegen $\overline{Q_1 M} = \overline{Q_1 R_1}$. Diese Bedingung liefert eine punktweise Konstruktion der Punktmenge $k_1 \setminus \{P_1, \bar{P}_1\}$, wenn U_1 die Durchmessergerade $M Q_1$ durchläuft (Fig.7.10).

(b) Ist k_1 der Hauptscheitelkreis der Ellipse c , so entstehen bei der orthogonalen perspektiven Affinität, welche $k_1 \rightarrow c$ leistet, konjugierte Halbmesser (M,P) , (M,Q) von c aus (M,P_1) , (M,Q_1) . Da eine perspektive Affinität nach 5.2, Bem.(c) teilverhältnistreue ist, gilt für alle Punkte $X \in c \setminus \{P, \bar{P}\}$ dann $TV(U, Q, M) = TV(V, Q, R)$ mit $\{U\} = \bar{P} X \cap M Q$ und $\{V\} = P X \cap R Q$, wobei R der Schnittpunkt der Ellipsentangenten in P und Q ist (Fig.7.11).

(c) Ist $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ eine perspektive Affinität und $c \subset \pi$ eine Ellipse mit den konjugierten Halbmessern (M, P) , (M, Q) , so ist $\alpha(c) \subset \pi$ eine Kurve mit dem Mittelpunkt $\alpha(M)$, welche durch die Punkte $\alpha(P)$, $\alpha(Q)$, $\alpha(\bar{P})$ geht und in $\alpha(P)$ bzw. $\alpha(Q)$ die zu $\alpha(M)\alpha(Q)$ bzw. $\alpha(M)\alpha(P)$ parallelen Geraden durch $\alpha(R)$ berührt. Durch die konjugierten Halbmesser $(\alpha(M), \alpha(P))$, $(\alpha(M), \alpha(Q))$ wird genau eine Ellipse $c_1 \subset \pi$ bestimmt. Wegen der Teilverhältnistreue einer perspektiven Affinität, Beweisschritt (b) und $\alpha(P) \in c_1$, $\alpha(\bar{P}) \in c_1$ folgt² $\alpha(c) \subset c_1$. Bei der zu α inversen perspektiven Affinität $\alpha^*: \pi \rightarrow \pi$ gilt dann analog $\alpha^*(c_1) \subset c$, also $\alpha(\alpha^*(c_1)) = c_1 \subset \alpha(c)$, was $c_1 = \alpha(c)$ nach sich zieht. □

Bem.: (b) Die in Beweisteil (a) angegebene punktweise Konstruktion eines Kreises liefert auch eine tangentialweise Konstruktion: Die Parallele zu $\bar{P}_1 X_1$ durch M schneidet $P_1 R_1$ in einem Punkt T_1 , der Kreistangente t_1 in X_1 (Fig.7.10); diese Konstruktion bleibt bei Anwendung einer perspektiven Affinität ungeändert und gilt daher auch für eine Ellipse (Fig.7.11).

Sind (M, P) , (M, Q) konjugierte Halbmesser einer Ellipse, so kann man wie folgt eine perspektive Affinität $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ so finden, daß $\alpha(c)$ ein Kreis ist: Sei MP die Achse a von α ; dann ist $\alpha(M) = M$ und daher notwendig $M\alpha(Q) \perp MP$ mit $\overline{M\alpha(Q)} = \overline{MP}$. Die perspektive Affinität $(a; Q \rightarrow \alpha(Q))$ führt c in eine Ellipse über, die nach Fn.1 ein Kreis ist (vgl. Fig.7.12). Ist MP die Hauptachse von c , so ist der Kreis $\alpha(c)$ der Hauptscheitelkreis k_1 und α die in 7.2,3 angegebene orthogonale perspektive Affinität mit $c \rightarrow k_1$. Ist MP die Nebenachse von c , so ist der Kreis $\alpha(c)$ der Nebenscheitelkreis k_2 von c , sodaß gilt:

Jede Ellipse ist zu ihrem Nebenscheitelkreis orthogonal perspektiv affin mit der Nebenachse als Affinitätsachse.

Bem.: (c) Mit Hilfe eines perspektiv affinen Kreises $\alpha(c)$ kann man die Tangenten aus einem Punkt oder parallel zu einer Geraden an eine Ellipse c finden (vgl. Fig.7.12).

Man vermeide die Konstruktionen mit Hilfe von Gegenpunkten.

Die Schnittpunkte einer Geraden mit einem bereits gezeichneten Kegelschnitt können, im Gegensatz zu den Tangenten aus einem Punkt, oft direkt graphisch ausreichend genau gefunden werden, sodaß man

² Es ist auch im Mathematikunterricht zu empfehlen, das Symbol \subseteq zu vermeiden. Aus $MCN \wedge NCM$ folgt $M=N$.

dabei auf Ausweichkonstruktionen verzichten kann. Die Forderung, nur Zirkel und Lineal zu verwenden, besitzt Bedeutung in einer Theorie der Konstruktionen, ist aber für das praktische Zeichnen nur "sportlicher Natur".

7.4 Schrägriß eines Kreises, Parallelriß einer Ellipse

Wir fassen Kreise als spezielle Ellipsen auf. Dann gilt:

Der Parallelriß c^P einer Ellipse c in einer nicht projizierenden Ebene ist eine Ellipse.

Beweis. Wird ϵ in die Hauptebene ϵ_0 parallelgedreht, so ist der Parallelriß c_0^P der parallelgedrehten Ellipse $c_0 \subset \epsilon_0$ nach 2.3,6 zu c_0 kongruent, und c^P ist nach 5.1 und 5.2 zu c_0^P perspektiv affin. Aus 7.3 folgt die Behauptung. \square

Nach 7.3 ist die Ellipse c^P festgelegt, wenn man konjugierte Halbmesser der Ellipse c (insbesondere normale Halbmesser eines Kreises c) abbildet.

Nach 5.2, (2) beherrscht man den Schnitt einer *Kreiszyylinderfläche* (Zylinderfläche mit einem Leitkreis) speziell einer *Drehzyylinderfläche* (die Erzeugenden sind zur Drehachse des Leitkreises parallel, womit eine Drehfläche vorliegt) mit einer zu den Zylindererzeugenden nicht parallelen Ebene.

Fig.7.12 zeigt eine drehzylindrische Röhre in einer Axonometrie mit den Verzerrungen $\lambda:\mu:\nu=1:1:1$. Der Leitkreis berührt die z -Achse im Ursprung U und ist durch seinen Mittelpunkt M auf der x -Achse bestimmt. Der scheinbare Umriß fällt in die y^P -parallele Tangente an k^P und wird nach 7.3 konstruiert.

Fig.7.13 zeigt ein Kreuzgewölbe in frontaler Axonometrie. Da die Symmetrie an jeder der beiden lotrechten Ebenen σ_1 und σ_2 durch eine Diagonale des Quadrats der vier Kämpferpunkte A, B, C, D die beiden Drehzylinder ϕ_1, ϕ_2 vertauscht und auf jeder Erzeugenden von ϕ_1 höchstens zwei Punkte von ϕ_2 liegen, bilden die Schnittellipsen von σ_1 und σ_2 mit ϕ_1 die Schnittkurve der beiden Flächen. Die ellipsenförmigen Bilder der kreisförmigen Schildbogen sind durch konjugierte Halbmesser festgelegt; das kreisförmige Bild k^P des Schildbogens k von ϕ_1 geht nach 5.2 durch die perspektive Affinität $(\alpha^P; M^P \rightarrow \bar{M}^P)$ in das Bild c^P der Schnittellipse $c = \sigma_2 \cap \phi_1$ über, was auch die Konstruktion des Umrißpunktes \bar{I} auf c ermöglicht.

Fig. 7.12

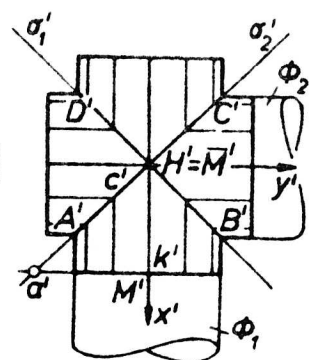
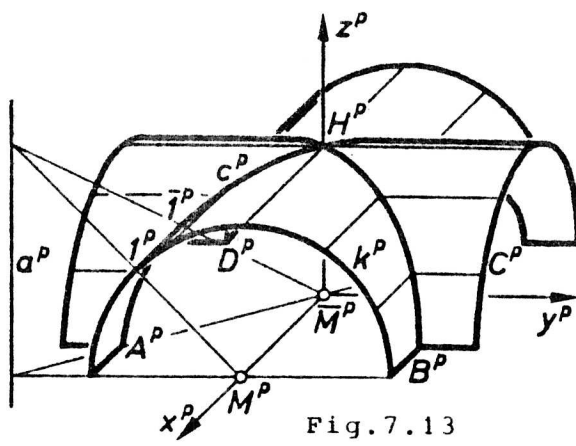
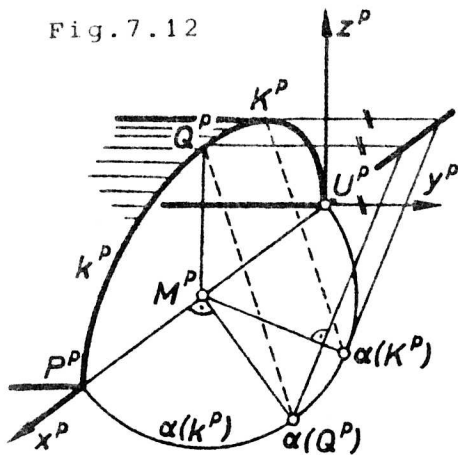


Fig. 7.13

8. Kegelschnitte

Die Ellipsen, insbesondere die Kreise, die Hyperbeln und die Parabeln werden als Kegelschnitte bezeichnet. Es ist in der Geometrie heute nicht üblich, die Geradenpaare zu den Kegelschnitten zu rechnen. Für die Schule wenig geeignet sind Begriffsbildungen der algebraischen Geometrie; man kann in der Schule ohne Verlust auf die Begriffe algebraische Kurve und Ordnung einer algebraischen Kurve verzichten und vermeide die Verwendung der komplexen Fortsetzung einer algebraischen Kurve.

Um der Kegelschnittlehre nicht zu viel Zeit zu opfern, werden manche Kegelschnitteigenschaften nach Auswahl des Lehrers ohne Beweis angegeben werden müssen.

8.1 Planimetrische Ergänzungen zur Hyperbel

Die Brennpunktdefinition einer Hyperbel $c \in \epsilon$

$$(1) \quad c = \{P \in \epsilon \mid |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a, F_1, F_2 \in \epsilon, \overline{F_1F_2} > 2a > 0\}$$

ist aus dem Mathematikunterricht bekannt. Wir benötigen die Begriffe Brennpunkt, Mittelpunkt, Durchmessergerade, Hauptachse, Hauptachsenlänge $2a$, Scheitel, Nebenachse (auf ihr liegen keine Hyperbelpunkte).

Analog zu 7.1 verwendet man zweckmäßig die Gleichung der Hyperbel in "Hauptlage" (Fig.8.1). Die nötigenfalls angegebene Herleitung läuft analog zu 7.1 mit $|f_1 - f_2| = 2a$ anstelle von $f_1 + f_2 = 2a$ und ergibt

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ mit } b^2 := e^2 - a^2 > 0.$$

Umgekehrt folgt für $P(x|y)$ aus (2) und (1) dann $P \in c$.

Die Hyperbel mit der Gleichung (2) hat die beiden Scheitel $(a|0)$, $(-a|0)$ auf der Hauptachse. Man vermeide unbedingt die Bezeichnung "Nebenscheitel" für die nicht auf der Hyperbel liegenden Punkte $(0|b)$, $(0|-b)$ oder Bezeichnungen der Art "imaginäre Scheitel", "imaginäre Achse" usw.

Genau die Durchmessergeraden $y - kx = 0$ mit $-b : a < k < b : a$ tragen Punkte der durch (2) bestimmten Hyperbel; die von Hyperbelpunkten

freien, zur Hauptachse symmetrischen Geraden $ay-bx=0$, $ay+bx=0$ beranden daher zwei gegenüberliegende Winkelfelder¹, in denen die Hyperbel enthalten ist. Diese Randgeraden u, v treffen jede Scheiteltangente in einem Punkt, der vom betreffenden Scheitel den Abstand b besitzt, und heißen die *Asymptoten* der Hyperbel.

Für $y=y_0 \in \mathbb{R}$ und $P_1(x_1|y_0)$ bzw. $P(x_0|y_0)$ auf der Asymptote $ay-bx=0$ bzw. auf der Hyperbel gilt $x_1^2 = \frac{a^2}{b^2} y_0^2$ bzw. $x_0^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y_0^2$, also

$$(3) \quad x_0^2 = a^2 + x_1^2.$$

Aus (3) folgt eine punktweise Hyperbelkonstruktion:

Auf einer zur Hauptachse parallelen Geraden wird der Abstand x_1 ihres Schnittpunktes mit einer Asymptote von der Nebenachse abgegriffen und mit Hilfe des Stechzirkels die Länge x_0 nach (3) konstruiert (Fig.8.1).

Anstelle der punktweisen Konstruktion mit Hilfe der Brennpunkte sollte nur diese graphisch günstigere *Stechzirkelkonstruktion* benutzt werden, bei der die beiden Asymptoten und a gegeben sind. Zuerst sind stets die Asymptoten zu zeichnen. Aus (2) folgt etwa für $x_0, x_1, y_0 > 0$ dann $x_0 \rightarrow +\infty$ für $y_0 \rightarrow +\infty$ und aus $ay-bx=0$ auch $x_1 \rightarrow +\infty$; wegen $(x_0-x_1) \cdot (x_0+x_1) = a^2 > 0$ nach (3) geht x_0-x_1 dann monoton gegen Null. Die Hyperbel nähert sich also jeder ihrer beiden Asymptoten, ohne sie zu erreichen.

Durch die beiden Asymptoten u, v und einen Punkt P ist eine Hyperbel festgelegt: Die Hauptachse ist jene Winkelsymmetrale der Asymptoten, welche in den P enthaltenden gegenüberliegenden Winkelfeldern verläuft, und (3) liefert aus x_0 und x_1 dann a (Fig.8.1).

Am schnellsten erhält man alle benötigten Aussagen über die Hyperbel aus folgendem Satz:

Sind P, \bar{P} zwei Punkte einer Hyperbel und H der Mittelpunkt der Strecke (P, \bar{P}) , so gestattet die Hyperbel die Symmetrie (vgl.5.2,2) an der Durchmessergeraden durch H parallel zu $P\bar{P}$; bei dieser Symmetrie werden die beiden Asymptoten vertauscht (Fig.8.2).

Beweis. Ist $H(x_\mu|y_\mu)$ der Mittelpunkt einer Sehne (P, \bar{P}) mit dem Richtungsvektor $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, so liegt die Sehne auf der

¹ In einer Ebene ϵ berandet jede Gerade zwei *Halbebenen*. Der Durchschnitt zweier Halbebenen von ϵ , welche durch zwei schneidende Geraden berandet werden, heißt ein *Winkelfeld*. Zwei schneidende Geraden definieren zwei Paare gegenüberliegender Winkelfelder.

Geraden mit der Parameterdarstellung

$$(4) \quad x = x_H + t\alpha, \quad y = y_H + t\beta \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Diese schneidet die Hyperbel c mit der Gleichung (2) in den Punkten P und \bar{P} , welche durch die Lösungen der in t quadratischen Gleichung

$$(5) \quad \frac{(x_H + t\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y_H + t\beta)^2}{b^2} - 1 = 0$$

bestimmt sind. Da H der Mittelpunkt der Strecke (P, \bar{P}) ist, müssen wegen (4) die beiden Lösungen von (5) entgegengesetzt gleich sein.

Dann ist die in t quadratische Gleichung (5) notwendig rein quadratisch, also

$$(6) \quad \frac{x_H \alpha}{a^2} - \frac{y_H \beta}{b^2} = 0.$$

Für alle zu $P\bar{P}$ parallelen Sehnen ist (α, β) fest, und nach (6) liegen die Mittelpunkte aller dieser Sehnen auf der Durchmessergeraden durch H .

Ersetzt man in Gleichung (2) die Zahl 1 durch die Zahl 0, so beschreibt (2) dann das Asymptotenpaar und die Rechnung bleibt unverändert, wobei in (5) auch 1 durch 0 zu ersetzen ist. \square

Dieser Satz liefert eine punktweise Hyperbelkonstruktion aus den beiden Asymptoten und einem Punkt P :

Schneidet eine Gerade g durch P , die nicht die Durchmessergerade PM durch P ist, die Asymptoten u, v in U, V , so ist der Punkt \bar{P} mit $\overline{UP} = \overline{PV}$ in den gleichen gegenüberliegenden Winkelfeldern wie P ein Hyperbelpunkt (Fig. 8.2); auf der Durchmessergeraden PM liegt ein Hyperbeldurchmesser mit M als Mittelpunkt.

Während die Tangenten einer Ellipse durch die perspektive Affinität zum Hauptscheitelkreis nach 5.2, Bem.(e) bestimmt sind, muß bei einer Hyperbel oder Parabel auf die Definition einer Tangente als Grenzlage einer Sehne zurückgegriffen werden. Verfolgt man diesen Grenzübergang an Hand von Fig. 8.2, so folgt:

Die Hyperbeltangente t in einem Hyperbelpunkt Q schneidet die beiden Asymptoten so, daß Q der Mittelpunkt der ausgeschnittenen Strecke ist. Dies liefert eine rasche, graphische genaue Konstruktion der Hyperbeltangente in Q mit Hilfe einer Parallelen zu einer Asymptote durch Q (vgl. Fig. 8.2).

Man vermeide die Konstruktion der Hyperbeltangente mit Hilfe der Brennpunkte. Übrigens ist der übliche Schulbeweis für diese Konstruktion unbrauchbar: Mit Hilfe eines Streckenvergleiches zeigt man dabei, daß auf einer Winkelhalbierenden der beiden Brenngeraden kein weiterer (eigentlicher) Hyperbelpunkt liegt, was auch für jede zu einer Asymptote parallele Geraden durch einen Hyperbel-

punkt gilt. Nur in der projektiven Ebene ist eine Gerade, die genau einen Kegelschnittpunkt enthält, eine Kegelschnitttangente.

Fig.8.1

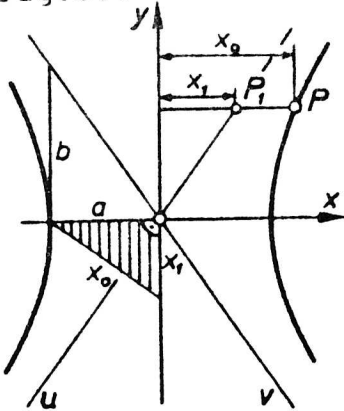


Fig.8.2

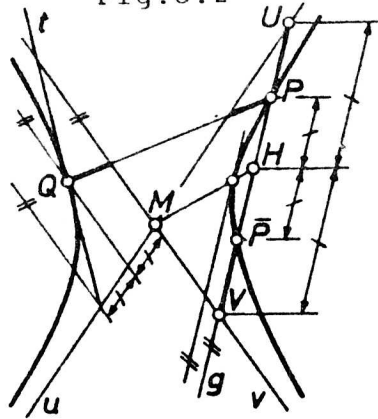
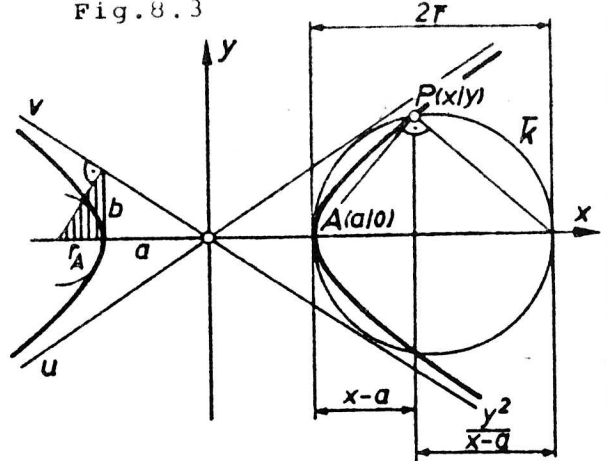


Fig.8.3



Weiter gilt:

Bei einer perspektiven Affinität $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ gehen eine Hyperbel $c \subset \pi$ in eine Hyperbel $\alpha(c) \subset \pi$ und die Asymptoten u, v von c in die Asymptoten $\alpha(u), \alpha(v)$ von $\alpha(c)$ über.

Beweis. Für $P \in c$ wird durch die Asymptoten $\alpha(u), \alpha(v)$ und den Punkt $\alpha(P)$ genau eine Hyperbel $c_1 \subset \pi$ bestimmt. Weil nach 5.2, Bem.(d) eine perspektive Affinität gleich lange Strecken einer Geraden in gleich lange Strecken auf der zugeordneten Geraden überführt, folgt aus obiger punktwisen Konstruktion $\alpha(c) \subset c_1$. Dann gilt bei $\alpha^*: \pi \rightarrow \pi$ notwendig $\alpha^*(c_1) \subset c$, also $\alpha(\alpha^*(c_1)) = c_1 \subset \alpha(c)$, was $c_1 = \alpha(c)$ nach sich zieht. \square

Bem.: (a) Die Scheitelkrümmungskreise ergeben sich durch eine zu 7.1, Bem.(a) analoge Rechnung:

Mit $P(x|y) \in c$ und $A(a|0)$ folgt für den Radius \bar{r} von \bar{k} dann $2\bar{r} = (x-a) + \frac{y^2}{x-a}$ (Fig.8.3) mit $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x+a)(x-a)$, also

$$\lim_{P \rightarrow A} 2\bar{r} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{y^2}{x-a} = \frac{b^2}{a^2} \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2\frac{b^2}{a},$$

was für den Radius r_A mit $r_A a = b^2$ die Konstruktion in Fig.8.3 ergibt.

8.2 Planimetrische Ergänzungen zur Parabel

Die Brennpunktdefinition einer Parabel $c \in \epsilon$

$$(1) \quad c = \{P \in \epsilon \mid P\bar{F} = \overline{P\bar{L}}, F \in \epsilon, \bar{L} \in \epsilon, F \notin \bar{L}\}$$

liefert die punktweise Konstruktion mit Hilfe des Brennpunkts F und der Leitgeraden l . Wir benötigen die Begriffe Achse, Scheitel, Durchmessergerade.

Gilt in "Hauptlage" $F(\frac{p}{2}|0)$ und hat l die Gleichung $x+\frac{p}{2}=0$ mit $\overline{F}l=p>0$ (Fig.8.4), so ergibt sich aus $\overline{P}l=x+\frac{p}{2}$, $\overline{P}\overline{F}^2=(x-\frac{p}{2})^2+y^2$ und (1) die Parabelgleichung

$$(2) \quad y^2-2px=0.$$

Umgekehrt folgt für $P(x|y)$ aus (2) und (1) dann $P \in e$.

Jede Durchmessergerade $y=y_0 \in \mathbb{R}$ enthält genau einen Parabelpunkt.

Wieder beherrscht eine Aussage alle benötigten Paralleleigenschaften:

Sind P, \overline{P} zwei Punkte einer Parabel und H der Mittelpunkt der Strecke (P, \overline{P}) , so gestattet die Parabel die Symmetrie an der Durchmessergeraden durch H parallel zu $P\overline{P}$.

Beweis (analog 8.1). Die Sehne (P, \overline{P}) liegt mit $H(x_\mu|y_\mu)$ für $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ auf der Geraden mit der Parameterdarstellung

$$(3) \quad x=x_\mu+t\alpha, \quad y=y_\mu+t\beta \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die zu den Punkten P und \overline{P} gehörigen Parameterwerte sind die Lösungen der in t quadratischen Gleichung

$$(4) \quad (y_\mu+t\beta)^2-2p(x_\mu+t\alpha)=0$$

und müssen entgegengesetzt gleich sein. Dann ist notwendig

$$(5) \quad y_\mu \beta - p\alpha = 0.$$

Für alle zu $P\overline{P}$ parallelen Sehnen ist (α, β) fest, und nach (5) liegen die Mittelpunkte aller dieser Sehnen auf der Durchmessergeraden durch H . □

Daraus folgt:

1. Die Verbindungsgerade des Schnittpunkts S zweier Parabeltangente p, q mit dem Mittelpunkt H der Strecke ihrer Berührungspunkte P, Q ist eine Durchmessergerade (Fig.8.5). (Die Symmetrie an der Durchmessergeraden durch H parallel zu PQ ist eine perspektive Affinität (vgl.5.2,2) und führt p in q über).

Bem.: (a) Nach 1 ist eine Parabeltangente keine Durchmessergerade.

- (b) Jede zur Scheiteltangente a parallele Gerade wird vom Durchmesser durch P und der Verbindung von P mit dem Scheitel A in einer Strecke geschnitten, deren Mittelpunkt auf der Tangente p liegt (Fig.8.4). (Folgt aus 1 mit $A=Q$).

2. Ist H der Mittelpunkt der Sehne (P, Q) und S der Schnittpunkt der Tangenten p, q in P, Q , so ist der Parabelpunkt R auf der Durchmessergeraden SH der Mittelpunkt der Strecke (S, H) und die Tangente r in R ist zu PQ parallel (Fig.8.5). (Bei der Symmetrie an SH in Richtung PQ bleibt R und daher auch die Tangente r

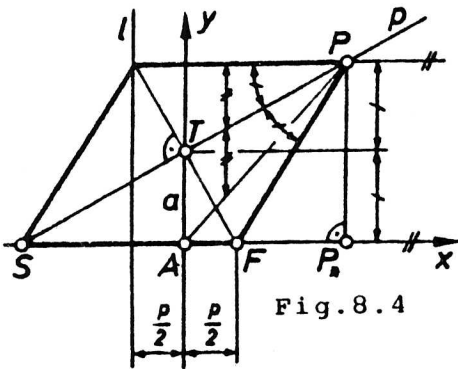


Fig.8.4

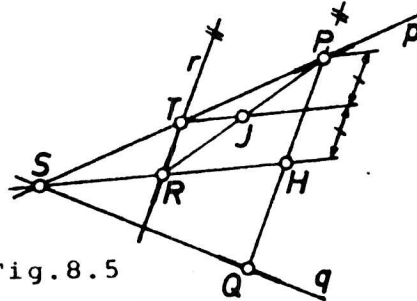


Fig.8.5

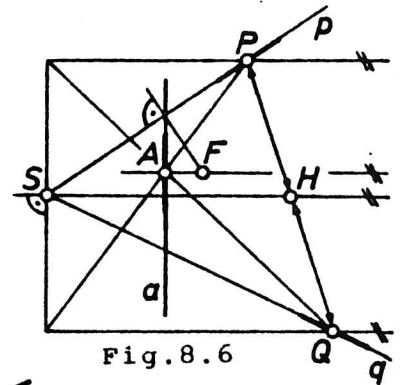


Fig.8.6

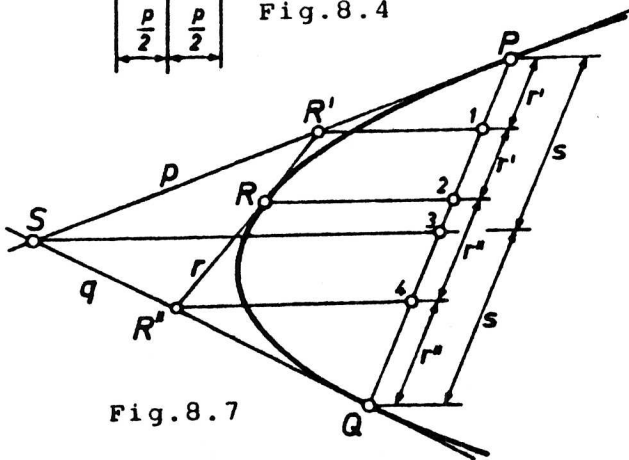


Fig.8.7

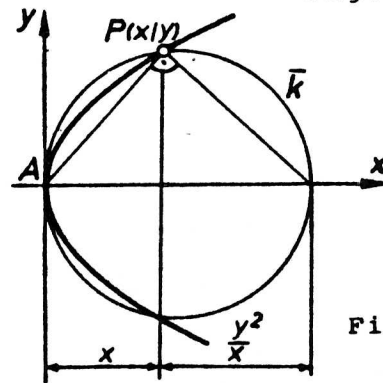


Fig.8.8

in R fest; da r nach (a) nicht SH ist, fällt r in eine zu PQ parallele Fixgerade der Symmetrie. Ist T der Schnittpunkt der Parabeltangente r und p und J der Mittelpunkt von (R, P) , so ist TJ eine Durchmessergerade. Aus $\overline{RJ} = \overline{JP}$ folgt $\overline{ST} = \overline{TP}$ und damit $\overline{SR} = \overline{RH}$.

Daraus erhält man folgende Tangentenkonstruktion der Parabel:

Ist P_* der Fußpunkt der Normalen aus einem Parabelpunkt P auf die Achse und schneidet die Tangente p die Achse in S , so ist der Scheitel A der Mittelpunkt der Strecke (S, P_*) (Fig.8.4). (Das ist ein Sonderfall von 2).

Diese Tangentenkonstruktion ist graphisch der Konstruktion der Parabeltangente als einer Winkelsymmetrale der beiden Brenngeraden (vgl.(c)) vorzuziehen, wenn S im Zeichenfeld liegt; sonst kann Bem.(b) benützt werden.

3. Die Normale zur Parabeltangente p in ihrem Schnittpunkt T mit der Scheiteltangente a geht durch den Brennpunkt F (Fig.8.4). (Durch \overline{PF} und \overline{Pl} wird ein Rhombus bestimmt, dessen Mittelpunkt wegen $\overline{AF} = \overline{Al}$ auf a und wegen l auf p liegt; Rhombusdiagonalen

sind orthogonal).

Bem.: (c) Die Parabeltangente p in P halbiert den Winkel zwischen PF und der Durchmessergeraden durch P (Fig.8.4). (Folgt aus Rhombuseigenschaften). Auf dieser Eigenschaft beruht die Fokussierung achsenparallel einfallenden Lichtes (Scheinwerfergehäuse in Gestalt eines Drehparaboloids).

Der übliche, auf einem Streckenvergleich beruhende Beweis von (c) ist unbrauchbar (vgl.8.1); auch jede Durchmessergerade enthält nur einen (eigentlichen) Parabelpunkt.

Durch zwei Punkte P, Q samt Tangenten p, q ist eine Parabel festgelegt (Fig.8.6): Nach 1 ist SH eine Durchmessergerade; die Durchmessergeraden durch P, Q und die dazu normale Gerade durch S bestimmen ein Viereck, dessen Diagonalschnittpunkt der Scheitel A ist (folgt aus (b)); der Brennpunkt ergibt sich nach 3.

Diese Konstruktion ist graphisch jener vorzuziehen, bei der die Tangenten an den Durchmessergeraden gespiegelt werden, was nach (c) den Brennpunkt ergibt.

4. Sind P, Q zwei Punkte einer Parabel und p bzw. q die Tangenten in P bzw. Q , so gilt für jeden weiteren Parabelpunkt R mit der Tangente r dann $TV(P, S, R') = TV(S, Q, R'')$ mit $\{S\} = p \cap q$, $\{R'\} = p \cap r$, $\{R''\} = q \cap r$ und $TV(P, S, R') = TV(R', R'', R)$ (Fig.8.7).

Beweis. Liegt R etwa auf dem Parabelbogen zwischen P und Q , so bestimmen die Durchmessergeraden durch R', R, S, R'' die Punkte $1, 2, 3, 4$ auf PQ , und nach 1 gilt $\overline{P1} = \overline{12} = :r'$, $\overline{P3} = \overline{3Q} = :s$, $\overline{24} = \overline{4Q} = :r''$. Wegen $2s = 2r' + 2r''$ und $|TV(P, S, R')| = |TV(P, 3, 1)| = r' : (s - r')$, $|TV(S, Q, R'')| = |TV(3, Q, 4)| = (s - r'') : r''$, $|TV(R', R'', R)| = |TV(1, 4, 2)| = r' : r''$ folgen die Behauptungen aus Fig.8.7 und 2.3. Liegt zum Beispiel Q auf der Parabel zwischen P und R , so ergeben die für Q richtigen Aussagen die Behauptungen für R . \square

Aus 4 ergibt sich eine tangential- und punktweise Konstruktion der Parabel, wenn zwei ihrer Punkte P, Q samt Tangenten p, q gegeben sind. Weiter gilt:

Bei einer perspektiven Affinität $\alpha: \pi \rightarrow \pi$ geht eine Parabel $c \subset \pi$ in eine Parabel $\alpha(c) \subset \pi$ über.

Beweis. Sind P, Q zwei Punkte samt Tangenten p, q von c , so ist durch $\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(p), \alpha(q)$ genau eine Parabel $c_1 \subset \pi$ bestimmt. Weil eine perspektive Affinität teilverhältnistreu ist, folgt nach obiger Konstruktion $\alpha(c) \subset c_1$. Dann gilt bei $\alpha^*: \pi \rightarrow \pi$ notwendig $\alpha^*(c_1) \subset c$, also $\alpha(\alpha^*(c_1)) = c_1 \subset \alpha(c)$, was $c_1 = \alpha(c)$ nach sich zieht. \square

(d) Den Radius des Scheitelkrümmungskreises liefert eine zu 7.1, Bem.(a) analoge Rechnung:

Mit $P(x|y) \in c$ und $A(0|0)$ folgt für den Radius \bar{r} von \bar{k} dann $2\bar{r} = x + \frac{y^2}{x}$ (Fig.8.8) mit $y^2 = 2px$, also $\lim_{p \rightarrow A} 2\bar{r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2}{x} = 2p$, was $r_A = p$ ergibt.

8.3 Parallelriß eines Kegelschnitts

Der Parallelriß einer Ellipse ist in 7.4 behandelt.

Der Parallelriß c^P einer Hyperbel c einer nicht projizierenden Ebene ist eine Hyperbel, deren Asymptoten die Risse der Asymptoten von c^P sind. Der Parallelriß einer Parabel einer nicht projizierenden Ebene ist eine Parabel.

Beweis. Wird ϵ in die Hauptebene ϵ_0 parallelgedreht, so ist der Parallelriß c_0^P des parallelgedrehten Kegelschnitts c_0 nach 2.3,6 zu c_0 kongruent, und c^P ist nach 5.1 und 5.2 zu c_0^P perspektiv affin. Aus 8.1 bzw. 8.2 folgen die Behauptungen. \square

Teilt man diese Aussage in der Schule nur mit, so können jene Inhalte von 8.1 und 8.2 wegbleiben, welche zum Beweis benötigt werden. Allerdings muß man darauf hinweisen, daß ein Beweis erforderlich ist.

In einigen Büchern findet sich "zur Abkürzung" folgende Überlegung: Jeder Kegelschnitt ist eine ebene algebraische Kurve 2.Ordnung und wird daher in der komplexen Erweiterung von jeder Geraden im algebraischen Sinn in zwei Punkten geschnitten; bei einer Projektion gehen Geraden in Geraden und Schnittpunkte in Schnittpunkte über, sodaß auch die Bildkurve von 2.Ordnung, also ein Kegelschnitt ist. Dieser Schluß ist aus folgenden Gründen unbrauchbar:

1. Nur in der komplex erweiterten projektiven Ebene ist die im algebraischen Sinn gezählte Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden und eines Kegelschnitts gleich zwei, was man in der Schule wegen des Fehlens homogener Koordinaten nicht zeigen kann.
2. Spricht man Paare komplexer Zahlen als neue "Punkte" an, so ist über Verbinden solcher Punkte und Schneiden der dann entstehenden "Geraden" und "Ebenen" nichts bekannt; die benötigten Lageaufgaben dieser auf analytischem Wege eingeführten neuen Elemente müßten durch Nachrechnen hergeleitet werden.
3. Weiter wird ohne Beweis folgender Satz benützt: Schneidet jede Gerade eine Kurve der komplexen projektiven Ebene in einer im algebraischen Sinn festen Zahl von Punkten, so ist die Kurve algebraisch; trivialerweise ist diese feste Zahl dann die Ordnung der Kurve.
4. Daß jede algebraische Kurve 2.Ordnung ein Kegelschnitt ist, stimmt erst, wenn die Kurve einen krummen reellen Bogen enthält, und wird in der Schule nicht bewiesen.

Fig.8.9 zeigt die Axonometrie einer Markthalle, die von einem parabolischen Zylinder überdacht wird. Die Leitparabel e ist durch die Punkte P, Q und die Stichhöhe h der Halle festgelegt. Mit Hilfe des nach 8.2,2 bestimmten Schnittpunkts S der Tangenten in P, Q wird e^P nach 8.2 gezeichnet; die x -parallele Umrißerzeugende ergibt sich nach 8.2,3 und darauf der Umrißpunkt K nach 8.2.

8.4 Ebene Schnitte einer Drehkegelfläche

Eine Kegelfläche heißt *Kreiskegelfläche*, wenn sie einen Leitkreis k besitzt. Liegt die Spitze auf der Drehachse des Leitkreises, so heißt die Fläche *Drehkegelfläche*; diese ist eine Drehfläche.

Die Bezeichnung "Kegelfläche 2.Ordnung" sollte in der Schule vermieden werden.

Mit Hilfe der Kugeln von G.D.DANDELIN (1822) zeigt man auf bekannte Weise:

Der Durchschnitt einer Ebene ϵ mit einer Drehkegelfläche ist ein Kegelschnitt, falls ϵ nicht durch die Kegelspitze S geht.

Bem.: (a) Jeder Kegelschnitt kann als ebener Schnitt einer Drehkegelfläche Φ aufgefaßt werden. (Eine Ellipse ist nämlich durch die beiden Hauptscheitel und einen Brennpunkt, eine Hyperbel durch die beiden Scheitel und einen Brennpunkt, eine Parabel durch Scheitel und Brennpunkt bestimmt).

(b) Enthält die *Richtebene* $\tilde{\epsilon}$, die Parallelebene zu ϵ durch die Kegelspitze, zwei Erzeugenden bzw. eine Erzeugende bzw. keine Erzeugende der Drehkegelfläche Φ , so ist $\epsilon \cap \Phi$ eine Hyperbel bzw. eine Parabel bzw. eine Ellipse. Dies ergibt der Beweis mit Hilfe der DANDELINSchen Kugeln.

(c) Jede Hyperbel ist ein Schnitt einer Drehkegelfläche Φ mit einer zur Drehachse der Kegelfläche parallelen Ebene.

Beweis. Wir legen die Hyperbel mit der Gleichung 8.1,(2) in die

Grundrißebene $z=0$; dann gilt $M(0|0|0), A(a|0|0), F(e|0|0)$.

Wählen wir b mit $b^2=e^2-a^2>0$ als Radius der DANDELINSchen Kugel und $S(0|0|b)$ als Spitze einer Drehkegelfläche Φ , so ist ihre Drehachse horizontal und der Schnitt von Φ und π_1 eine Hyperbel ϵ mit dem Mittelpunkt M und einem Brennpunkt in F . Da die in Fig.8.10 schraffierten rechtwinkligen Dreiecke noch in einem Winkelmaß und der Kathetenlänge b übereinstimmen, ist wegen $e^2-b^2=a^2$ dann

A ein Scheitel von ϵ , also ϵ die gegebene Hyperbel. \square

Jede Erzeugende von Φ , welche zu ϵ nicht parallel ist, also nicht in $\tilde{\epsilon}$ liegt, enthält genau einen Punkt des Kegelschnitts $\epsilon \cap \Phi$. Benützt man die in 5.3 eingeführte Sprechweise, so gilt mit (a) und (b):

Ein Kegelschnitt ist genau dann eine Hyperbel bzw. Parabel bzw. Ellipse, je nachdem er zwei Fernpunkte bzw. einen Fernpunkt bzw. keinen Fernpunkt besitzt.

Aus Symmetriegründen ist im Falle eines Parabelschnittes die Parabelachse parallel zur Kegelerzeugenden in der Richte ebene. Damit gilt:

Eine Parabel einer projektiven Ebene enthält den Fernpunkt ihrer Durchmessergeraden.

Im Falle eines Hyperbelschnittes geht jede der beiden Erzeugenden e_1, e_2 in der Richte ebene $\tilde{\epsilon}$ durch einen Fernpunkt der Hyperbel. Genauer gilt:

Eine Hyperbel geht durch die Fernpunkte ihrer Asymptoten, und diese sind die Tangenten der Hyperbel in ihren Fernpunkten.

Beweis. Nach (c) kann jede Hyperbel als achsenparalleler Schnitt einer Drehkegelfläche aufgefaßt werden. Wie Fig.8.10 zeigt, gilt für den Öffnungswinkel φ der Drehkegelfläche dann $\tan \frac{\varphi}{2} = b:a$. Nach 8.1 sind daher die Erzeugenden e_1, e_2 in der Richte ebene $\tilde{\epsilon}$ zu den Asymptoten der Hyperbel parallel.

Die Tangente der Hyperbel in einem ihrer Fernpunkte ist nach 5.4 die Schnittgerade der Tangentialebene der Drehkegelfläche durch e_1 bzw. e_2 mit der Ebene der Hyperbel. Da diese Tangentialebenen in Fig.8.10 erstprojizierend sind, enthalten sie den Hyperbelmittelpunkt. \square

Nach 8.1 geht eine Durchmessergerade durch den Hyperbelpunkt $P(x_0|y_0)$ in eine Asymptote über, wenn $y_0 \rightarrow +\infty$ und damit $x_0 \rightarrow +\infty$ läuft. Dies macht plausibel, daß eine Asymptote durch einen Hyperbelfernpunkt geht, ist aber kein Beweis. Nach Sprechweise 1 in 5.3 wird ein Fernpunkt nämlich durch parallele Geraden bestimmt, und das sagt nichts darüber aus, wann ein Fernpunkt einer krummen Kurve angehört. Die Fernpunkte der Hyperbel werden mit 5.3 durch die zu ϵ parallelen Erzeugenden der Richte ebene $\tilde{\epsilon}$ festgelegt.

Als Minimalprogramm in der Schule ist vertretbar, sich auf die Konstruktion der ebenen Schnitte einer Drehkegelfläche mit einer in einem Riß projizierenden Ebene zu beschränken, wobei die Achse der Drehkegelfläche im gepaarten Riß projizierend ist.

Fig.8.9

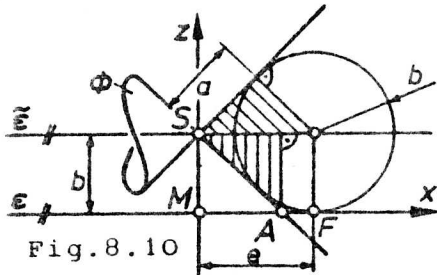
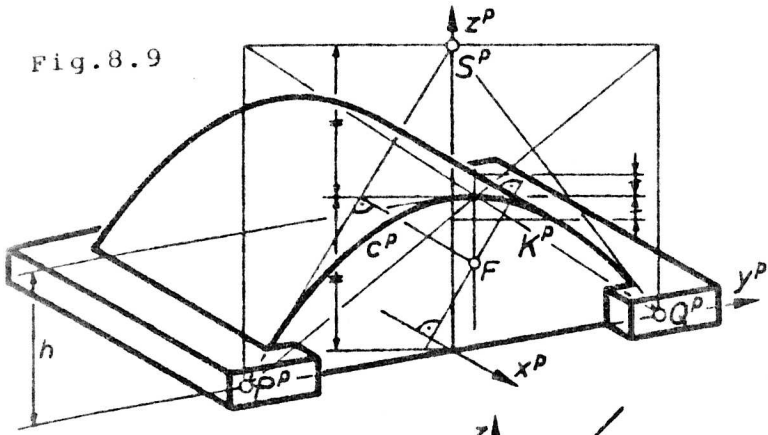
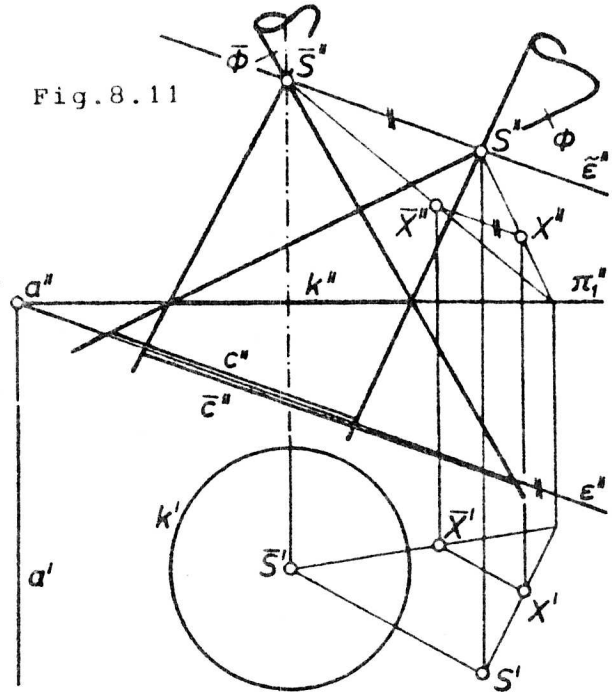


Fig.8.10

Fig.8.11



8.5 Ebene Schnitte einer Kreiskegelfläche

Der Durchschnitt einer Ebene ϵ mit einer Kreiskegelfläche ϕ ist ein Kegelschnitt, falls ϵ nicht durch die Kegelspitze S geht.

Beweis. Die Ebene des Leitkreises k von ϕ sei π_1 , und ϵ sei zweitprojizierend (Fig.8.11); es genügt, $\epsilon \neq \pi_1$ voraussetzen. Wir wählen jenen Punkt \bar{S} der erstprojizierenden Drehachse von k als Spitze einer Drehkegelfläche $\bar{\phi}$ durch k , für den $S\bar{S} \parallel \epsilon$ gilt, und bezeichnen die Parallelebene zu ϵ durch S mit $\tilde{\epsilon}$.

Die Abbildung $\beta: P \setminus \tilde{\epsilon} \rightarrow P \setminus \tilde{\epsilon}$ mit $X \in P \setminus \tilde{\epsilon} \rightarrow \beta(X) =: \bar{X}$ und $X\bar{X} \parallel S\bar{S}$, $XS \cap \bar{X}\bar{S} \in \pi_1$, ist eine Bijektion, da \bar{X} aus X eindeutig in der Ebene $S\bar{S}X$ konstruierbar und X aus \bar{X} eindeutig rekonstruierbar ist; genau für $X \in \pi_1$ gilt $X = \bar{X}$. Wegen $\epsilon \cap \tilde{\epsilon} = \{ \}$ und $\bar{X} \in \epsilon$ für $X \in \epsilon$ ist $\alpha := \beta|_{\epsilon: \epsilon \rightarrow \epsilon}$ eine Bijektion, deren Fixpunkte auf $a = \epsilon \cap \pi_1$ liegen. Für alle Punkte $X \in \epsilon \setminus a$ ist $X\bar{X} \parallel S\bar{S}$. Durchläuft X eine Gerade $g \subset \epsilon$, so schneidet die Ebene Sg die Ebene π_1 in einer Geraden g_1 , und \bar{X} liegt auf $Sg_1 \cap \epsilon =: \bar{g}$; die Menge der Bildpunkte aller Punkte von g ist daher die Gerade \bar{g} .

Nach 5.2 ist $\alpha: \epsilon \rightarrow \epsilon$ und daher auch die inverse Abbildung $\alpha^*: \epsilon \rightarrow \epsilon$ eine perspektive Affinität. Die Abbildung α^* führt nach Definition von β den Kegelschnitt $\bar{c} := \bar{\phi} \cap \epsilon$ in die Schnittkurve $c := \phi \cap \epsilon$ über, sodaß $c = \alpha^*(\bar{c})$ gilt. Nach 7.3 bzw. 8.1 bzw. 8.2 ist daher c ein Kegelschnitt. □

¹ Wir denken in diesem Beweis die Fernpunkte nicht hinzugefügt.

Bem.: (a) Enthält die Richtebene $\tilde{\epsilon}$ keine Erzeugende von ϕ bzw. eine Erzeugende von ϕ bzw. zwei Erzeugenden e_1, e_2 von ϕ , so ist $\epsilon \cap \phi$ eine Ellipse bzw. eine Parabel bzw. eine Hyperbel, deren Asymptoten zu e_1, e_2 parallel sind. (Die Ebene $\tilde{\epsilon}$ ist auch Richtebene von ϵ bezüglich $\bar{\phi}$ und $\alpha^*: \epsilon \rightarrow \epsilon$ erhält den Typus eines Kegelschnitts und ist nach 8.1 asymptotentreu).

Der Kegelschnitt c entsteht aus dem Leitkreis k von ϕ durch Anwendung einer Perspektivität zum Zentrum S . Sind die Ebenen des Leitkreises k und des Kegelschnitts c bezüglich einer Parallelprojektion nicht projizierend, so erhält man den Parallelriß c^P des ebenen Schnittes c der Kreiskegelfläche gemäß 5.5 durch Anwendung einer perspektiven Kollineation auf die Ellipse (insbesondere den Kreis) k^P (vgl. 8.6).

Ist die Spitze S von ϕ der Augpunkt einer Zentralprojektion auf die Bildebene ϵ , so ist $\tilde{\epsilon}$ die Verschwindungsebene. Damit folgt: Der Zentralriß k^C eines Kreises k in einer nichtprojizierenden Ebene α ist ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse bzw. Parabel, bzw. Hyperbel, je nachdem k die Verschwindungsgerade von α nicht trifft bzw. in einem Punkt bzw. in zwei Punkten schneidet.

8.6 Parallelriß ebener Schnitte einer Kreiskegelfläche, Zentralriß eines Kreises

Diese beiden Aufgaben sind durch Anwendung einer perspektiven Kollineation auf eine Ellipse (einen Kreis) k konstruktiv in gleicher Weise zu behandeln. Dabei ist k der Parallelriß des in einer nicht projizierenden Ebene liegenden Leitkreises bzw. der Zentralriß der parallelgedrehten Lage des Kreises, Z der Parallelriß der Kegelspitze bzw. der Meßpunkt der Kreisebene, α der Parallelriß der Schnittgeraden der Leitkreisebene mit der nicht projizierenden Schnittebene bzw. der Zentralriß der Drehachse der Paralleldrehung. Wir bezeichnen mit ν den Parallelriß der Schnittgeraden der Leitkreisebene mit der Richtebene bzw. den Zentralriß der parallelgedrehten Lage der Verschwindungsgeraden der Leitkreisebene. Zur Festlegung der perspektiven Kollineation $\kappa: \pi \rightarrow \pi$ wird ein Punkt $V \in \nu$ verwendet; dann ist $\kappa(V) = \bar{V}$ der Fernpunkt von ZV und κ die perspektive Kollineation $(Z, \alpha; V \rightarrow \bar{V})$. Wir schreiben $\kappa(P) = \bar{P}$, $\kappa(g) = \bar{g}$ für alle Punkte $P \in \pi$ und Geraden $g \subset \pi$.

Fall 1: $k \cap \nu = \{ \}$ (Fig. 8.12). Der Kegelschnitt $\kappa(k) =: \bar{k}$ besitzt keinen Fernpunkt und ist daher eine Ellipse. Die Punkte $1, 2 \in k$ mit zu α parallelen Tangenten ergeben Punkte $\bar{1}, \bar{2} \in \bar{k}$ mit zu α parallelen Tangenten, sodaß $(\bar{1}, \bar{2})$ ein Durchmesser von \bar{k} ist. Der Mittelpunkt \bar{N} von $(\bar{1}, \bar{2})$ ist der Mittelpunkt von \bar{k} ; sein

E
H
T
V
C
n
F
i
i
V
L
B
U
S

Urpunkt N liegt auf $Z\bar{N}$ und auf 12 . Die zu a parallele Strecke $(N, 3)$ mit $3 \in k$ geht bei κ in einen zu a parallelen Halbmesser von \bar{k} über, sodaß $(\bar{N}, \bar{1}), (\bar{N}, \bar{3})$ konjugierte Halbmesser von \bar{k} sind.

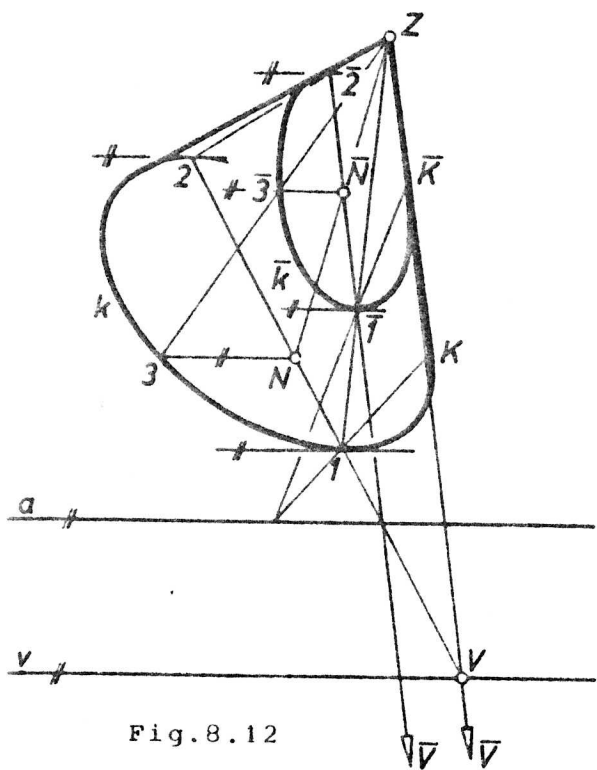


Fig. 8.12

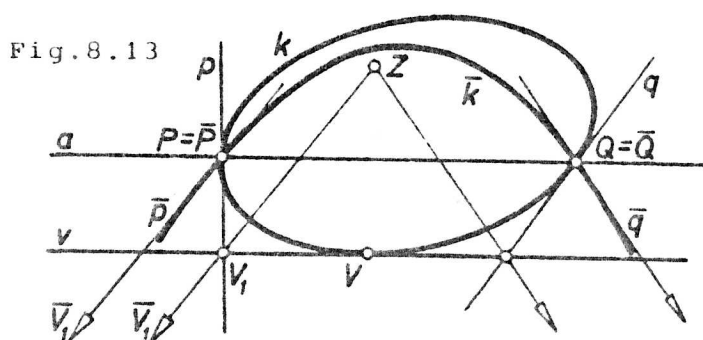


Fig. 8.13

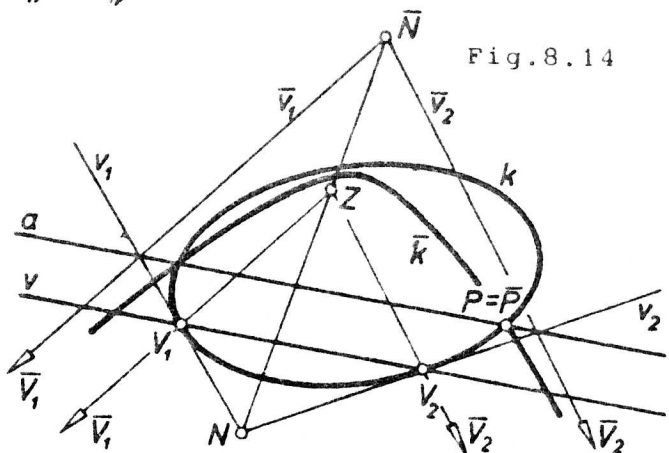


Fig. 8.14

Fall 2: $k \cap v = \{V\}$ (Fig. 8.13). Dann ist \bar{k} eine Parabel. Sind P, Q zwei Punkte von k , so gilt $\bar{P}, \bar{Q} \in \bar{k}$ (falls vorhanden nehme man $\{P, Q\} = a \cap k$, was $P = \bar{P}, Q = \bar{Q}$ nach sich zieht). Schneidet die Tangente p von k in P die Gerade v in V_1 , so ist \bar{V}_1 der Fernpunkt von ZV_1 , also $\bar{p} \parallel ZV_1$; analoges gilt für die Tangente q von k in Q . Durch die Punkte \bar{P}, \bar{Q} und die Tangenten \bar{p}, \bar{q} ist die Parabel \bar{k} nach 8.2 festgelegt.

Fall 3: $k \cap v = \{V_1, V_2\}$ (Fig. 8.14). Die Geraden ZV_1, ZV_2 gehen durch die Fernpunkte \bar{V}_1, \bar{V}_2 der Hyperbel \bar{k} und sind daher zu ihren Asymptoten parallel. Diese entstehen als Tangenten von \bar{k} in den Fernpunkten \bar{V}_1, \bar{V}_2 bei κ aus den Tangenten v_1, v_2 von k in V_1, V_2 . Durch $\bar{P} = \kappa(P)$ mit $P \in k$ ist die Hyperbel \bar{k} nach 8.1 festgelegt (für $P \in a \cap k$ gilt $P = \bar{P}$); Fig. 8.14 zeigt nur einen Ast von \bar{k} .

Bem.: (a) Ist \bar{k} Parallelriß des ebenen Schnittes einer Kreiskegelfläche, so liefert die perspektive Kollineation die Umrißpunkte auf \bar{k} (vgl. Fig. 8.12).

(b) Ist \bar{k} der hyperbelförmige Zentralriß eines Kreises k , so schneidet k die Verschwindungsebene in zwei Punkten. Der Sehraum, also jener durch die Verschwindungsebene bestimmte Halb-

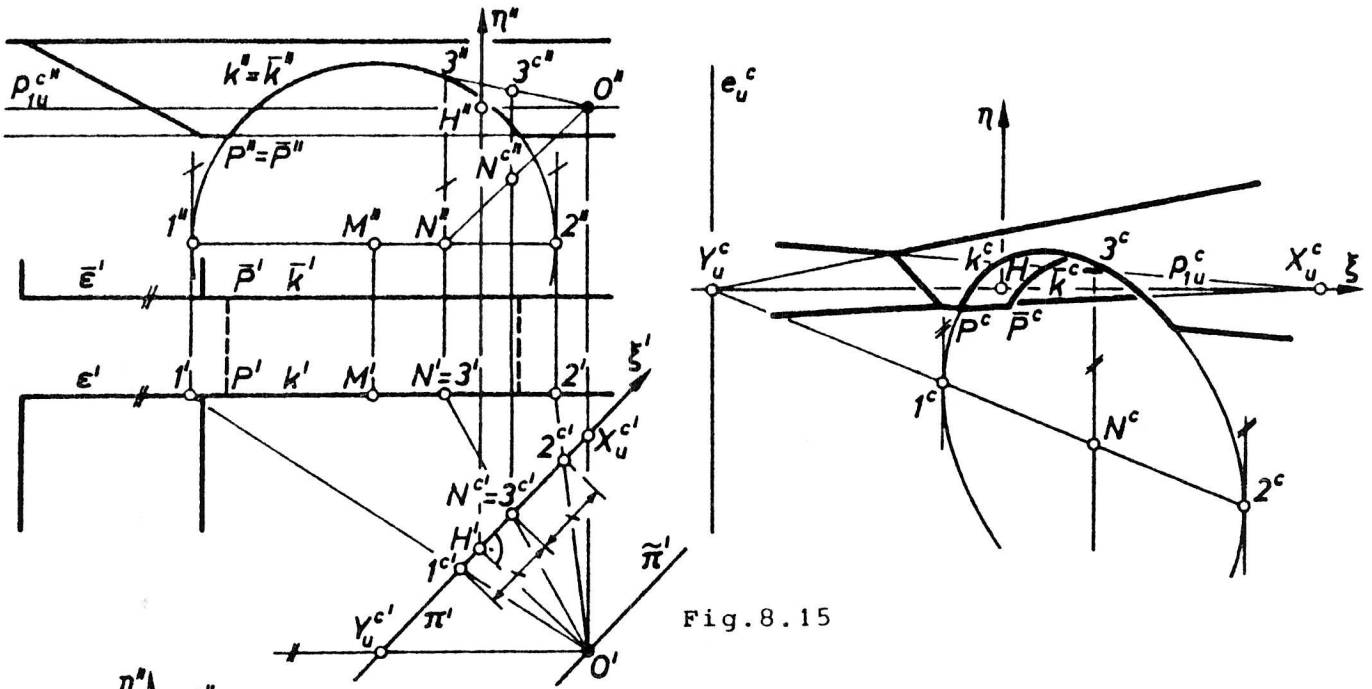


Fig. 8.15

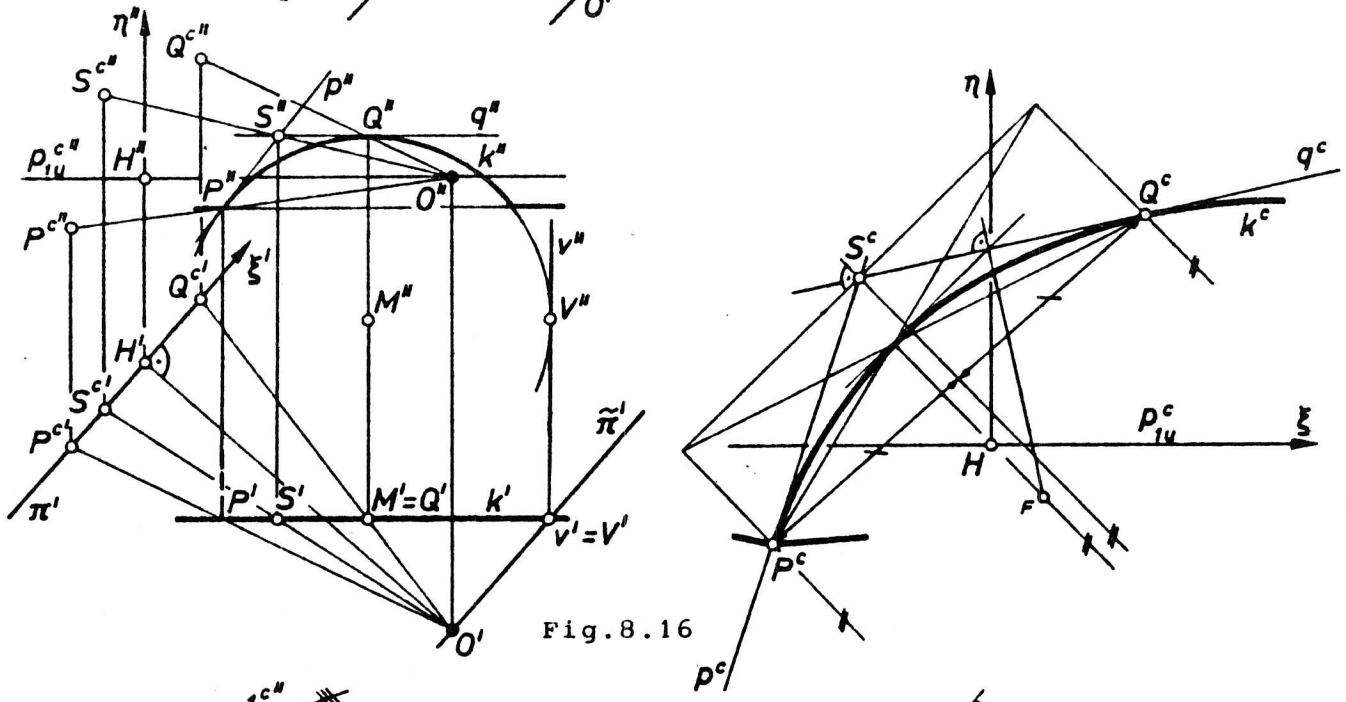


Fig. 8.16

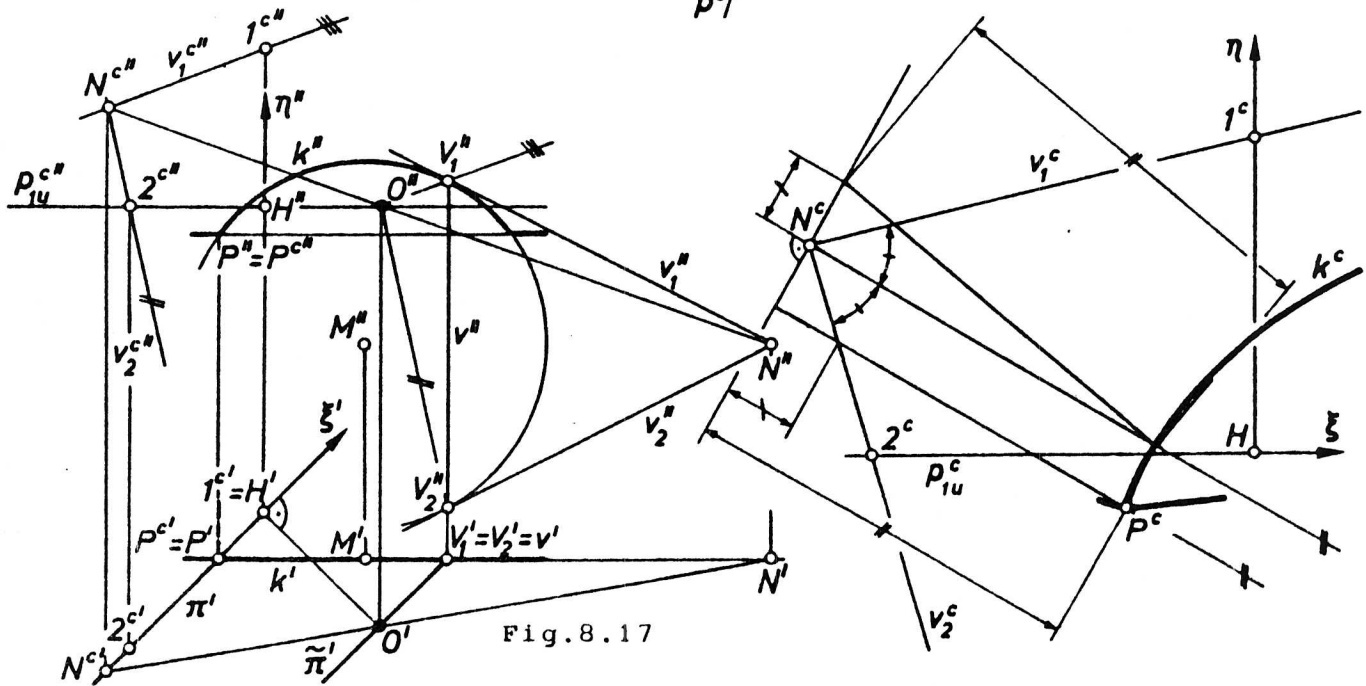


Fig. 8.17

raum, in dem die Bildebene liegt, enthält einen Kreisbogen, dessen Zentralriß ein Ast der Hyperbel \bar{k} ist.

8.7 Zentralriß eines Kreises im Durchschnittsverfahren

Der Zentralriß k^c eines Kreises k kann im Durchschnittsverfahren ohne Paralleldrehen der Kreisebene ϵ ermittelt werden, indem man die zur Festlegung des Kegelschnitts nötigen Angabeelemente zuerst in Auf- und Grundriß aufsucht.

Die Figuren 8.15, 8.16, 8.17 zeigen Zentralrisse eines drehzylindrischen Durchlasses, wobei der Stirnkreisbogen k entsprechend den verschiedenen Lagen des Augpunkts O zum Objekt einen ellipsenförmigen bzw. parabelförmigen bzw. hyperbelförmigen Zentralriß k^c besitzt; durch Eintragen der Schnittgeraden v der Verschwindungsebene $\bar{\pi}$ mit der Ebene von k können diese drei Fälle unterschieden werden. Die Einheitsstrecke für den Zentralriß ist in diesen Figuren doppelt so groß gewählt wie die Einheitsstrecke für die gepaarten Normalrisse. Diese Bildfolge zeigt den Einfluß der Lage des Augpunkts zum Objekt auf die Bildwirkung eines Zentralrisses.

Ist k^c eine Ellipse (Fig.8.15), so ermitteln wir die Punkte 1,2 von k mit zu $a=\epsilon\cap\pi$ parallelen Tangenten, den Punkt N auf 12, dessen Zentralriß N^c der Mittelpunkt der Strecke $(1^c,2^c)$ ist und schließlich den zu a parallelen Halbmesser $(N^c,3^c)$ von k^c .

Ist k^c eine Parabel (Fig.8.16), so benützen wir zwei Punkte P,Q von k und den Schnittpunkt S ihrer Tangenten p und q .

Bei einer Hyperbel k^c (Fig.8.17) ist der Zentralriß N^c des Schnittpunkts N der Tangenten v_1, v_2 von k in den Verschwindungspunkten $\{V_1, V_2\}=v\cap k$ der Mittelpunkt von k^c (vgl.Fig.8.14), und die Asymptoten v_1^c, v_2^c sind zu OV_1, OV_2 parallel; mit Hilfe eines Punktes 1 auf v_1 erhält man v_1^c und analog v_2^c . Durch Angabe noch eines Punktes $P^c \in k^c$ mit $P \in k$ ist die Hyperbel k^c planimetrisch festgelegt.

Der Kreisbogen \bar{k} des drehzylindrischen Durchlasses entsteht aus k durch eine x -parallele Schiebung, also eine Parallelperspektivität. Nach 5.5 geht k^c punkt- und tangentialweise in \bar{k}^c bei der perspektiven Kollineation $(X_u^c, e_u^c; P^c \rightarrow \bar{P}^c)$ über, wobei die Kollineationsachse e_u^c in den Zentralriß der Schnittgeraden e_u der beiden parallelen Kreisebenen ϵ und $\bar{\epsilon}$ fällt (vgl.Fig.8.15).